



ARTIGO

PARTIÇÕES CONEXAS BALANCEADAS DE GRAFOS

POR

Yoshiko Wakabayashi

yw@ime.usp.br

Os crescentes avanços tecnológicos têm contribuído para uma sociedade cada vez mais conectada, proporcionando uma melhora na qualidade de vida nos mais diversos aspectos: sociais, educacionais, de saúde, de comunicação, etc. Neste contexto, surgem, de maneira natural, problemas

sobre conjuntos de objetos que exibem propriedades que se traduzem em relações binárias entre eles, e nos quais se objetiva descobrir a existência de certas subestruturas e/ou otimizar alguma função. Para tratar problemas desse tipo, em especial os de natureza discreta, grafos podem ser as estruturas matemáticas

apropriadas, pois permitem que muitas técnicas e resultados conhecidos sobre eles possam ser utilizados.

Grafos são estruturas definidas por um par (V,A) , nas quais V é um conjunto de *vértices* e A é um conjunto de *arestas*, cada uma delas *interligando* um par de vértices. Assim, redes sociais, redes educacionais, redes epidemiológicas, redes de transporte, mapas geográficos e relações binárias em geral podem ser representados por grafos, e várias questões de interesse envolvendo esses objetos podem ser investigadas. Por exemplo, qual o seu grau de vulnerabilidade quanto à perda de comunicação entre pares de vértices (isto é, se danos a um pequeno número de arestas ou vértices pode causar tal perda), sua estabilidade (número máximo de vértices independentes), e seu diâmetro (distância máxima entre pares de vértices). Essas questões clássicas têm sido largamente investigadas, sendo vasta a literatura a respeito. Uma outra questão é a de determinar se um dado grafo conexo pode ser particionado em um certo número fixo de subgrafos conexos de tamanhos similares. Essa última questão, que abordaremos aqui, pode ser de interesse tanto pela sua aplicabilidade direta em diversas situações práticas, mas também no seguinte contexto mais geral.

Muitos algoritmos para problemas em grafos podem utilizar o seguinte esquema recursivo: dado um grafo conexo G , particionar G em dois subgrafos conexos de tamanhos similares, resolver os subproblemas correspondentes para esses subgrafos e de suas soluções obter uma solução para o grafo original G . Neste

contexto, é desejável que a bipartição seja tão balanceada quanto possível, minimizando assim a profundidade da recursão. Além disso, no contexto de processamento distribuído, do ponto de vista de balanceamento de carga, partições balanceadas são relevantes.

Problemas de partições balanceadas podem ser mais gerais, no sentido que o grafo de entrada pode ter pesos associados aos seus vértices, e o balanceamento deve levar em conta o peso dos subgrafos conexos da partição. Ao precisar esse conceito de balanceamento, obtemos algumas variantes deste problema. A seguir, focamos em um problema dessa natureza, que chamamos de Problema da *Partição Conexa Balanceada (PCB)*, definido como segue.

Dado um inteiro $k \geq 2$, um grafo conexo $G=(V,A)$ com peso não-negativo $w(v)$ definido para cada vértice $v \in V$, encontrar uma k -partição (V_1, V_2, \dots, V_k) de V tal que $G[V_i]$ (subgrafo induzido por V_i) seja conexo para $1 \leq i \leq k$, e o peso do subgrafo mais leve seja o maior possível. Mais formalmente, queremos encontrar uma tal partição que maximiza a função $\min\{w(V_i): i=1, \dots, k\}$, onde $w(X)$ denota o peso do conjunto X , definido como a soma dos pesos dos elementos em X .

A variante do PCB quando k é fixo (não faz parte da entrada) é denotada por PCB k . Em 1983, Camerini, Galbiati e Maffioli [1] mostraram que PCB2 é NP-difícil, donde se obtém que PCB e PCB k para $k \geq 3$ também são NP-difíceis. Dentre as aplicações do PCB k , mencionamos problemas em processamento de imagens, clustering,

logística, sistemas operacionais e robótica.

Nosso interesse pelos problemas PCB e PCB k surgiu no início de 2000, com orientações de um doutorado e um mestrado. Os primeiros estudos tiveram como foco o desenvolvimento de algoritmos de aproximação e questões mais teóricas sobre limites de aproximabilidade. Dizemos que um algoritmo para um problema de maximização é uma *r*-aproximação se, para qualquer instância desse problema, encontra em tempo polinomial uma solução viável cujo valor é pelo menos *r* vezes o valor de uma solução ótima para essa instância. Na década de 90 já era conhecido um algoritmo de 3/4-aproximação, obtido por Chlebíkova [3] para o PCB 2 , e um algoritmo polinomial exato para o PCB k devido a Perl e Schach no caso especial em que o grafo de entrada é uma árvore. A tese de doutorado de Salgado (2004) apresenta alguns resultados de inaproximabilidade e algoritmos de aproximação para grafos *k*-conexos, $k \in \{3, 4\}$, e também resultados para o caso em que as classes devem ter uma certa proporção fixa do peso total [6]. Em colaboração com Chataigner e Salgado [2] mostramos que o PCB (em que *k* faz parte da entrada) não pode ser aproximado por uma razão melhor que 5/6 sob a hipótese que $P \neq NP$. Em sua dissertação de mestrado, Lucindo [4] implementou (e disponibilizou para acesso público) algoritmos com bom desempenho empírico baseados na geração aleatória de árvores geradoras, e uso de algoritmos polinomiais para árvores.

Mais recentemente, investigamos o PCB k sob o ponto de vista poliédrico. Nesta abordagem, o conjunto das soluções viáveis são pontos no espaço de dimensão

[*V*], e o que se busca é a descrição linear -- ainda que parcial -- do poliedro definido como o fecho convexo desses pontos. Essa abordagem foi feita com vistas à implementação de algoritmos exatos de *branch-and-bound* e *branch-and-cut*. Esses estudos, conduzidos em colaboração com Miyazawa, Ota e Moura [5], propõem formulações para o PCB k tanto como Programa Linear Misto (PLM) e como Programa Linear Inteiro (PLI).

Consideramos duas formulações como PLM, ambas baseadas em fluxos em redes, e com um número polinomial de variáveis e restrições. A formulação como PLI tem somente variáveis binárias e um número potencialmente grande de desigualdades. Neste último modelo, usamos algoritmos de separação polinomiais para resolver o PL relaxado. Também fortalecemos o modelo com novas desigualdades válidas, para as quais projetamos algoritmos de separação polinomiais.

Essas formulações impõem uma ordenação das classes da partição, de acordo com seus pesos, e consideram como objetivo maximizar o peso da classe mais leve. Tais formulações permitem também considerar outras funções-objetivo que capturam o conceito de balanceamento como, por exemplo, minimizar o peso de uma classe mais pesada ou minimizar a maior diferença de peso entre as classes.

Os experimentos computacionais conduzidos mostraram que os algoritmos exatos que implementamos têm desempenhos substancialmente melhores que os métodos exatos publicados na literatura. Além dos dados da literatura, consideramos também dados obtidos em órgãos públicos sobre a quantidade de

delitos em regiões urbanas (como Chicago e Campinas) para definir instâncias do PCB k úteis para logísticas de patrulhamento policial dessas regiões.

Adicionalmente, obtivemos os primeiros resultados poliédricos associados à segunda formulação restrita ao caso de pesos uniformes. Tais resultados podem levar a novas abordagens para o PCB k . Devido ao espaço limitado, deixamos de

mencionar esses resultados, referências a outros trabalhos, e análises comparativas do desempenho dos algoritmos que propusemos e dos existentes na literatura (todos testados no mesmo ambiente computacional). Parte desses resultados podem ser vistos em [5].

Referências

1. CAMERINI, P; GALBIATI, G.; MAFFIOLI, F. On the complexity of finding multi constrained spanning trees. *Discrete Applied Mathematics*, v. 5, p. 39-50, 1983.
2. CHATAIGNER, F.; SALGADO, L. R. B.; WAKABAYASHI, Y. Approximation and inapproximability results on balanced connected partitions of graphs. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 39 (1), 2007 (eletrônico).
3. CHLEBÍKOVA, J. Approximating the maximally connected partition problem in graphs. *Information Processing Letters*, v. 60, p. 225-230, 1996.
4. LUCINDO, R. P. F. L. Partições de grafos em subgrafos conexos balanceados. Dissertação de mestrado, IME-USP, 2007. <https://www.ime.usp.br/~lucindo/graphpar/>
5. MIYAZAWA, F. K.; MOURA, P. F. S.; OTA, M. J.; WAKABAYASHI, Y. Cut and flow formulations for the balanced connected k-partition problem. Em: Baiou, M.; Gendron, B.; Günlük, O.; Mahjoub, A. (editores). *Combinatorial Optimization. ISCO 2020. Lecture Notes in Computer Science*, v. 12176, p. 128-139, Springer.
6. SALGADO, L. R. B.; WAKABAYASHI, Y. Approximation results on balanced connected partitions of graphs. *Proceedings of LACGA, 2004. Electronic Notes in Discrete Mathematics* 18 (2004) p. 207-212.



YOSHIKO WAKABAYASHI é Professora Titular do Departamento de Ciência da Computação da Universidade de São Paulo. Obteve o doutorado em Matemática Aplicada na Universität Augsburg, Alemanha, em 1986. Faz pesquisa nas áreas de otimização combinatória e teoria dos grafos. Em 2010 foi admitida na Ordem Nacional do Mérito Científico, classe Comendador. É membro da Academia de Ciências do Estado de São Paulo desde 2012, e membro da Academia Brasileira de Ciências, na área de Matemática, desde 2019.