

As Dobraduras de Papel e os Padrões de Matemática das Dobras Visíveis: um Processo de Aprender a Aprender Mediado pelas Tecnologias Digitais

Title: *Paper Folds and Mathematics Patterns of Crease Patterns: a Learning to Learn Process Mediated by Digital Technologies*

Título: *El Plegado de Papel y los Patrones Matemáticos de los Pliegues Visibles: un Proceso de Aprendizaje Mediado por Tecnologías Digitales*

Aline Silva De Bona
Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia (IFRS -
Campus Osório)
ORCID: [0000-0002-0052-1987](https://orcid.org/0000-0002-0052-1987)
aline.bona@osorio.ifrs.edu.br

Anelise Lemke Kologeski
Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia (IFRS -
Campus Osório)
ORCID: [0000-0001-9257-8915](https://orcid.org/0000-0001-9257-8915)
anelise.kologeski@osorio.ifrs.edu.br

Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Universidade Federal do Rio
Grande do Sul (UFRGS)
ORCID: [0000-0002-2312-9056](https://orcid.org/0000-0002-2312-9056)
mbasso@ufrgs.br

Resumo

O artigo apresenta uma pesquisa-ação que desenvolveu 32 algoritmos de construção e montagem de dobraduras de papel. As orientações para o desenvolvimento dessas dobraduras podem ser escritas, visuais e/ou animadas, e foram aplicadas em 184 estudantes da Educação Básica. Após o desenvolvimento das dobraduras, sugere-se a observação das dobras visíveis do papel em busca de padrões, modelos e conceitos de matemática, para uma melhor apropriação do conhecimento pelos estudantes. Em seguida, após o trabalho manual com as dobraduras, e com base nas dobras visíveis observadas, as dobraduras foram plugadas com o auxílio de 15 tecnologias digitais escolhidas pelos estudantes que participaram das práticas com essa proposta investigativa, contemplando também 38 professores. Como resultado, foi possível observar que os conceitos de matemática e os algoritmos das dobraduras de papel são objetos-de-pensar para o estudante, e que permitem ao docente planejar atividades de forma individual ou colaborativa, contextualizada ou interdisciplinar, aumentando as possibilidades para um aprendizado significativo e efetivo em sala aula.

Palavras-Chave: Dobraduras de Papel; Dobras Visíveis; Padrões de Matemática; Tecnologias Digitais.

Abstract

The article presents an action research that developed 32 algorithms to build and develop paper folds. The guidelines for developing these paper folds can be written, visual and/or animated, and were applied to 184 Basic Education students. After developing the folds, it is suggested to observe the crease pattern of the paper in search of patterns, models and mathematical concepts, to improve the appropriation of knowledge by students. Then, after manual work with the folds, and based on the crease patterns observed, the folds were plugged in with the help of 15 digital technologies chosen by the students who participated in the practices with this investigative proposal, also covering 38 teachers. As a result, it was possible to observe that mathematical concepts and paper folding algorithms are objects of thought for the student, and that they allow the teacher to plan activities in an individual or collaborative way, contextualized or interdisciplinary, increasing the possibilities for a meaningful and effective learning in the classroom.

Keywords: Paper Folds; Crease Patterns; Mathematics Standards; Digital Technologies.

Resumen

El artículo presenta una investigación-acción que desarrolló 32 algoritmos para construir y desarrollar pliegues de papel. Las directrices para desarrollar estos pliegues de papel pueden ser escritas, visuales y/o animadas, y se aplicaron a 184 estudiantes de Educación Básica. Después de desarrollar los pliegues, se sugiere observar el patrón de pliegues del papel en busca de patrones, modelos y conceptos matemáticos, para mejorar la apropiación del

Cite as: Bona, A. S. De, Kologeski, A. L. & Basso, M. V. de A. (2025). As Dobraduras de Papel e os Padrões de Matemática das Dobras Visíveis: um Processo de Aprender a Aprender Mediado pelas Tecnologias Digitais. Revista Brasileira de Informática na Educação, 33, 1159-1178. <https://doi.org/10.5753/rbie.2025.5130>

conocimiento por parte de los estudiantes. Luego, después del trabajo manual con los pliegues, y con base en los patrones de pliegues observados, los pliegues se conectaron con la ayuda de 15 tecnologías digitales elegidas por los estudiantes que participaron en las prácticas con esta propuesta investigativa, que también abarcó a 38 docentes. Como resultado, fue posible observar que los conceptos matemáticos y los algoritmos de plegado de papel son objetos de pensamiento para el estudiante, y que permiten al docente planificar actividades de forma individual o colaborativa, contextualizada o interdisciplinaria, aumentando las posibilidades de un aprendizaje significativo y efectivo en el aula.

Palavras Clave: Plegado de papel; Pliegues visibles; Patrones matemáticos; Tecnologías digitales.

1 Introdução

Cada vez mais os estudantes estão imersos nas tecnologias da informação e da comunicação, especialmente nas redes sociais. De um modo geral, as ações de investigação e pesquisa desses estudantes se iniciam com buscas na internet e em outros espaços virtuais (Bona, 2012) (Villalta e Silva, 2021) (Bona e Basso, 2023). Com isso, a função e o objetivo do espaço escolar de sala de aula, com a presença dos colegas e professores, se torna um ambiente carente de atenção dos estudantes, pelo fato de que, por exemplo, o telefone celular que está em suas mãos parece sempre ser o mais essencial em qualquer tempo, respondendo a qualquer questionamento que possa surgir, usado como um objeto que traz segurança, sendo sempre o objeto com maior prioridade na sala de aula na perspectiva dos estudantes, e que não pode esperar para ser utilizado posteriormente, em um outro momento ou espaço.

Paralelamente, o Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA) de 2021, disponível no documento da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OECD, 2023), contempla na sua avaliação perguntas computacionais articuladas a matemática, demonstrando a necessidade de os estudantes desenvolverem habilidades relacionadas à computação para entender, enfrentar e resolver os problemas e desafios do mundo atual. Assim, o estudante deve ser capaz de utilizar a tecnologia como aliada, de forma útil e funcional, no seu cotidiano, em vez de usá-la apenas para momentos de lazer e descontração em redes sociais, como normalmente pode ser observado. Este documento da OECD aborda três funções para as tecnologias da informação e da comunicação, atrelando-as ao pensamento computacional na vida cotidiana e no trabalho, mudando a forma como as pessoas se informam, se comunicam e aprendem, da mesma forma como buscam resolver suas curiosidades, já que não se pergunta mais aos professores presencialmente como acontecia poucas décadas atrás. Essas três funções que integram as tecnologias digitais com a escola, e em particular com a aprendizagem, são:

- 1) Os estudantes estão imersos nas redes sociais, no Whatsapp, sites de busca e outros (Bacich et al., 2015);
- 2) Os estudantes e professores fazem uso das tecnologias para sua organização administrativa (usando planilhas, ambientes virtuais, sistemas de chamada, etc.), edição (editores de texto, de imagens, de criação, etc.), compartilhamento (seja por plataformas, redes, etc.) e virtualidade da aula, isto é, contemplando o momento escolar através de um tempo híbrido (Souza et al., 2023) (Fioreze e Halbestadt, 2021), ou seja, os estudantes estão desenvolvendo atividades planejadas da disciplina em outros horários, fora do tempo presencial em sala de aula;
- 3) Os estudantes, os professores e a comunidade acadêmica atualizam-se, informam-se, estudam, trabalham, e se desenvolvem por meio das tecnologias digitais, e desta forma precisam desenvolver fluência digital (Tori, 2010) (Santos e Teixeira, 2019).

Nesse contexto, pensar e refletir sobre a aula de matemática na educação básica implica em planejar ação, construção e apropriação, bem como promover o uso das tecnologias em movimento, e criar contextos, situações e oportunidades para que os estudantes possam investigar, despertando a curiosidade deles. Essa investigação pode acontecer desde a busca em sites

conhecidos, bem como em materiais e anotações de aulas com conceitos de matemática, permitindo ao estudante criar, aprimorar e desenvolver o enunciado de um problema, assim como a solução deste problema, de forma autoral, colaborativa e cooperativa, com seus colegas, professores, comunidade escolar e virtual, e até mesmo com o apoio da família, como um elemento essencial. Essa dinâmica acontece no trabalho de (Caruso et al., 2024), onde os estudantes constroem um dos Sólidos de Arquimedes, o icosaedro truncado, em alusão a bola utilizada nos jogos da Copa do Mundo, usando papelão, tornando o estudante protagonista do seu aprendizado, confeccionando uma bola a partir da junção de hexágonos e pentágonos. Com isso,

A missão de um professor de Matemática não é ensinar Matemática, é formar um aluno através da Matemática. Estaria eu, por esta via, a diminuir a importância da Matemática e do seu ensino? De modo algum. Estou a afirmar precisamente o contrário, que a sua necessidade é tão grande que, sem Matemática, não é possível a educação de um ser humano. (Nóvoa e Alvim, 2022, p. 18).

Mathematical literacy is an individual's capacity to reason mathematically and to formulate, employ, and interpret mathematics to solve problems in a variety of real-world contexts. It includes concepts, procedures, facts and tools to describe, explain and predict phenomena. It assists individuals to know the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgements and decisions needed by constructive, engaged and reflective 21st Century citizens (OECD, 2023, p. 22).

A alfabetização de matemática não visa promover apenas o desenvolvimento do estudante, além de apresentar conceitos e fórmulas, mas sim tem o objetivo e propósito de fazer com que esses conceitos e fórmulas façam sentido, de forma útil, na vida real. Isso permite a capacidade de um ser humano de raciocinar matematicamente, de formular, empregar e interpretar a matemática para resolver problemas em uma variedade de contextos do mundo real. Incluir conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas para descrever, explicar e prever fenômenos e situações, para ajudar outros seres a conhecer o papel que a matemática desempenha no mundo, bem como permitir a tomada de decisões e julgamentos fundamentados e necessários aos cidadãos críticos, empenhados e reflexivos, são atributos que qualquer educador busca fomentar nos estudantes, nos dias de hoje. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é exatamente esse: fazer com que os estudantes se encantem com a matemática, a ponto de entendê-la, na prática, e de que este conhecimento possa ser útil na vida deles, através do uso das dobraduras. O problema de pesquisa deste trabalho consiste em como fazer o estudante participar ativamente do desenvolvimento de uma dobradura, a ponto de despertar seu interesse e curiosidade, tornando o aprendizado de fato efetivo, prazeroso e significativo, buscando um método para resolver os desafios propostos pelas dobraduras de papel apresentadas a ele, tanto de forma desplugada quanto plugada, contemplando e valorizando também os seus conhecimentos digitais. E a metodologia utilizada para isso pode ser um fator bastante significativo e positivo diante dos resultados que se busca, no contexto escolar, fomentando o aprendizado do estudante de forma ativa e participativa, tornando o aluno protagonista do seu aprendizado. Consequentemente, a metodologia de trabalho usada aqui é colaborativa e investigativa, com o professor e demais pesquisadores orientando os estudantes sobre a realização das atividades, quando necessário.

Nessa perspectiva, os projetos de pesquisa, com fomento do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS), contam com a coordenação de uma professora de matemática, e com a colaboração de professores da área da informática, psicóloga, professora de inglês, e bolsistas do curso de Licenciatura em Matemática, do curso tecnólogo em Análise e Desenvolvimento de Sistemas, assim como estudantes do curso Técnico em Informática integrado ao ensino médio.

Todos os participantes dos projetos lidam diretamente com as dobraduras de papel, relacionando-as com a matemática e o pensamento computacional, levando-as para o ambiente escolar através da oferta de oficinas. As dobraduras foram desenvolvidas em nossa instituição de ensino nos anos de 2023/2024, e visam criar práticas investigativas ancoradas no uso de um recurso concreto e desplugado, como as dobraduras de papel, mediadas pela metodologia do pensamento computacional, tornando-as plugadas quando o estudante aprende a aprender matemática através das suas inferências (Bona e Basso, 2023) (Germano e Bona, 2023) (Germano et al., 2024A) (Santos et al., 2024).

As construções geométricas são uma parte muito popular da matemática ao longo da história (Martin, 1998). No trabalho de (Lang, 1996), que trabalha com origamis e construções geométricas, fala-se sobre a importância do uso de dobraduras para se entender as proporções nas construções geométricas, fundamentando assim a importância deste trabalho com o uso de dobraduras, com base numa arte milenar japonesa (Abe, 2003) já amplamente conhecida e difundida na sociedade de hoje, embora não contemple culturalmente a ideia deste trabalho, que é ensinar matemática de uma forma significativa e lúdica: “*Thus, within origami, there is a practical interest in devising folding sequences for particular proportions that overlaps with the mathematical field of geometric constructions.*” (Lang, 1996, p. 3).

Neste artigo, explora-se a matemática presente nos padrões das dobras visíveis do papel e o potencial das tecnologias digitais plugadas trazidas pelos estudantes e professores ao criarem situações problemas sobre as dobraduras de papel, com dados obtidos por meio da realização de oficinas próprias para este fim, e com resoluções propostas e testadas pelos próprios estudantes, sem a comparação entre o conhecimento de antes e depois dos estudantes, mas com a perspectiva de que a atividade desencadeia neles o interesse pela matemática, tornando o aprendizado mais interessante. Além disso, realiza-se um recorte da categorização dessas dobraduras de papel, de acordo com uma classificação realizada pela equipe de execução, conforme o propósito das dobraduras utilizadas.

2 A Relação entre as Dobraduras de Papel e o Pensamento Computacional

Até o ano de 2024, para ministrar uma aula, o professor precisa concorrer com a atenção dada pelos estudantes para os dispositivos móveis, como o telefone celular. Ou então, este mesmo professor precisa se tornar aliado da tecnologia, fazendo uso do telefone celular em suas aulas, para que assim consiga a devida atenção dos seus estudantes, exigindo uma certa fluência no uso de tal dispositivo. Desta forma, a pesquisa apresentada neste trabalho ilustra como as dobraduras de papel podem ser recursos acessíveis e que despertam o interesse e a curiosidade dos estudantes, além de serem também recursos sustentáveis. As pesquisas que envolvem a criação e o desenvolvimento de uma dobradura podem acontecer para além dos espaços de sala de aula e do tempo regular de estudo na escola, contemplando pesquisas e inferências que podem ser exploradas em sites de buscas e rede sociais, bem como o uso de ferramentas dedicadas, ou contemplando a participação de pessoas externas à sala de aula, como familiares e amigos.

Dobraduras que fazem uso da programação desplugada são apresentadas por (Bona et al., 2023), assim como (Bona, 2012) (Matsubara et al., 2023) e (Caruso et al., 2024), demonstrando que os conceitos são aplicados de forma concreta, e fazendo uso de materiais simples e acessíveis, como é o caso da dobradura da sacola plástica apresentado no trabalho de (Matsubara et al., 2023), do barco de papel apresentado por (Germano et al. 2024B) e da bola realizada com papelão por (Caruso et al., 2024). Os trabalhos de (Silva et al., 2021) (Pereira e Henno, 2017) e (Carneiro e Spira, 2015) também citam as dobraduras como um instrumento e recurso pedagógico interessante, pela ludicidade e pela sensação de descoberta que provoca. Além disso, nas redes sociais e na internet, de forma geral, pode-se encontrar justificativas aos conceitos de matemática

presentes na forma de construir a dobradura (e até demonstrações), que registram diferentes aprendizados de conceitos de matemática, desde a geometria plana até as frações, demonstrando assim que pode ser um caminho mais interessante para se aprender conteúdos que tradicionalmente não são tão bem aceitos pelos estudantes quando há apenas a aula expositiva tradicional, sem permitir que os estudantes experimentem na prática os conceitos, relações e medidas.

Diversas práticas pedagógicas sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de matemática podem ser encontradas no trabalho de (Andrade et al., 2023), mas nada se fala sobre origamis e dobraduras. Por isso, o manuseio de dobraduras foi escolhido para este trabalho, a fim de também contemplar o movimento desplugado que complementa o movimento plugado na escola, de tal forma a valorizar a autonomia e as escolhas dos estudantes na busca pelas ferramentas adequadas, já que eles estão inseridos num contexto completamente digital, tornando o ambiente mais amigável e acolhedor aos estudantes.

Tentar construir uma dobradura de papel exige muita atenção, e consiste em um dos objetivos iniciais das oficinas propostas pelo projeto. A escolha de como se dá a orientação dos passos de construção da dobradura, seja através de desenhos e imagens, da escrita, ou por vídeo, consiste em um dos resultados da pesquisa realizada por (Germano e Bona, 2023), e permite ao estudante múltiplas formas de chegar no resultado final, permitindo a inclusão de alunos com necessidades especiais de forma bastante explícita, já que diferentes métodos de construção da dobradura podem ser adotados, deixando cada estudante confortável com a maneira escolhida para seguir o desenvolvimento da dobradura. Esta orientação de construção de uma sequência de passos em ordem se aproxima de um algoritmo, na perspectiva do pensamento computacional, segundo (Vicari et al., 2018).

A metodologia do pensamento computacional está intimamente relacionada com a prática investigativa da dobradura de papel, pois inicialmente o estudante visualiza a dobradura finalizada que o professor traz para mobilizar e encantar a aula. Em seguida, o professor pode distribuir, por exemplo, os algoritmos das dobraduras de papel aos estudantes. Esses algoritmos podem ser então da forma escrita, com imagens ou com vídeos, e podem ser entregues aos estudantes individualmente, ou em grupo, conforme sua escolha, para que em seguida os estudantes possam iniciar sua resolução, além de serem interpretados em Libras quando necessário, ou lidos por um leitor de tela, promovendo a inclusão. Na resolução, o estudante irá decompor os passos, e os detalhes, para posteriormente encontrar padrões, e repetições de movimentos e de conceitos. Na sequência, o estudante poderá abstrair detalhes de dobras, permitindo esquematizar a montagem da dobradura em passos mais complexos, contemplando proporções de tamanhos, por exemplo, conforme a grau de dificuldade da dobradura, identificando relações matemáticas.

Ao finalizar a dobradura, o estudante e seus colegas, se assim for, teriam executado o algoritmo, e construído o seu próprio algoritmo de resolver, pois em todas as situações vividas pelos bolsistas, voluntários, professores externos ao projeto e estudantes que viveram a proposta desta pesquisa, o desenvolvimento dos passos para a criação da dobradura sempre foi de forma autoral. Assim, primeiramente explica-se de forma oral, para depois organizar as ideias em uma forma escrita, para que em seguida se obtenha a dobradura de forma digital, usando tecnologia da informação e da comunicação, contemplando as três formas citadas pela (OECD, 2023).

Diante da sequência de passos de construção de uma dobradura acima mencionada, os pilares do pensamento computacional ficam claramente evidentes, e são compreendidos pelos estudantes de forma implícita num primeiro momento, já que não é o objetivo de oficina ensinar os pilares do pensamento computacional, mas sim a importância de se ter um método para resolver um problema, que é construir a dobradura de papel. Posteriormente, segundo a prática investigativa construída, os estudantes percebem esses pilares.

3 Metodologia e Condução das Oficinas

A metodologia da pesquisa é uma pesquisa-ação entre professores, técnico e estudantes do grupo de pesquisa Matemática e suas Tecnologias (MATEC), e os professores e estudantes externos das escolas públicas parceiras da região próxima da cidade de Osório, no Litoral Norte do Rio Grande do Sul, de forma que o grupo de nossa instituição cria as propostas de dobraduras de papel, seus algoritmos e práticas, e leva aos participantes externos, com a aplicação das oficinas. Os participantes, muitas vezes, contribuem com ajustes e incrementam a proposta ofertada, retomando e aprimorando as atividades. Em seguida os professores externos fazem suas propostas também, e compartilham com o grupo de pesquisa, de forma que todo o processo se constitui como uma roda, que circula e se reinicia. Por isso, a pesquisa é colaborativa quanto à testagem e aplicação, e está ancorada nos conceitos teóricos de aprendizagem de (Piaget, 1973); de tecnologias de (Papert, 1993); do pensamento computacional de (Vicari et al., 2018) e (Wing, 2006); bem como da educação matemática de (D'Ambrosio, 1996) e de (Fiorentini e Lorenzato, 2009), tendo como recurso a dobradura de papel (que difere do origami pela questão sócio-cultural-histórica) desenvolvida através da ação investigativa de cada estudante, em paralelo com a concepção do docente que aprende a planejar com seus estudantes, e onde o estudante aprende a aprender consigo e com seus colegas, sendo parte ativa de todo esse processo de aprendizado e construção do conhecimento.

Os saberes teóricos são organizados de forma sistemática para a formação do docente da informática, assim como do docente da educação matemática. Durante a realização das oficinas é disponibilizado um suporte quanto às questões conceituais de matemática, para todos os participantes, mas que normalmente é uma ajuda mais solicitada pelos professores participantes. A finalidade desse apoio é para que assim todos possam compreender os algoritmos e suas relações com a matemática, da mesma forma quanto às tecnologias digitais que os próprios estudantes trazem, e que muitas vezes nem todos conhecem ou são efetivamente familiarizados. Com isso, o grupo responsável pela pesquisa, além de propor as ações da pesquisa, constrói momentos de formação docente na escola, a fim de promover um momento com práticas investigativas a partir das vivências no projeto, motivado pelas próprias trocas que acontecem durante a realização das oficinas, de tal forma a incentivar a participação de todos.

A metodologia de ação das oficinas é dialógica, e acontece de duas formas distintas, listadas a seguir.

- 1) Primeiro, em grupos, são distribuídas as folhas de papel contendo o algoritmo de uma dobradura, seja esse algoritmo visual, escrito ou misto, ou ainda, com vídeo (ou audiodescrição) e sem mostrar o resultado final dessa dobradura. Ou seja, são passadas apenas as orientações, mas sem que os participantes saibam qual é dobradura que irá resultar. Solicita-se a eles que explorem e construam, e que tentem identificar o que está sendo proposto.
- 2) Depois, troca-se a forma de agir, propondo-se assim a segunda maneira de aplicação da oficina. Os mesmos participantes recebem uma outra dobradura, pronta, que já consiste no resultado final, e então precisam escolher e propor um tipo de algoritmo que chegue naquele resultado (seja ele visual, escrito ou vídeo), para daí testarem e realizarem.

Destaca-se que a ordem de aplicação das 2 metodologias pode variar, mas que desta forma proporciona-se ao estudante, na primeira opção, a ideia de descobrir o que vai se formar sem ver o resultado, e na segunda opção, a conquista de achar a forma de construir quando já se sabe o que é esperado.

Geralmente, a primeira proposta é de nível fácil ou médio inicial, e a segunda proposta já é de nível médio. Para as dobraduras de nível difícil, que são assim classificadas pelas conceituações de matemática e não pela motricidade das dobras, normalmente os estudantes se dividem em

grupos, em que alguns dos alunos fazem a dobra de papel e outros fazem a dobradura de forma digital. Contudo, o objetivo aqui não é explicar a classificação quanto a educação matemática, mas sim quanto a categorização das dobraduras de papel que são os objetos de pensar-com utilizados como recurso para promover uma melhor e mais eficiente experiência de aprendizado.

E ainda, há uma terceira forma de aplicação, geralmente utilizada com estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental, ou em oficinas de aldeia indígena, ou ainda em abrigos temporários, como aconteceu na época dos alagamentos devido a catástrofe climática das enchentes do mês de maio de 2024 no Estado do Rio Grande do Sul. Esta terceira maneira consiste no apoio direto oferecido pela professora-pesquisadora, ou pela bolsista do projeto que participa junto das oficinas, auxiliando diretamente cada passo junto dos estudantes, tanto em encontros presenciais como virtuais (realizados através da ferramenta Google Meet, conforme interesse e disponibilidade dos participantes), servindo também para auxiliar os casos de dobraduras mais complexas, com alto nível de dificuldade, e aquelas utilizadas apenas para brincar e gerar descontração, sem o propósito de explorar a matemática presente (especialmente quando utilizadas com a educação infantil).

Depois de construída a dobradura de papel, o propósito é explorar suas medidas e proporções, suas características e elementos, pensar em usos e contextos, de forma que os saberes dos estudantes quanto a matemática e áreas correlatas sejam identificados e valorizados. Em seguida, são propostas perguntas como: *Qual a relação da medida do lado do quadrado inicial da dobradura com as medidas/dimensões do resultado?* Questões assim fazem os estudantes refletirem em conjunto na busca por respostas, trocando ideias e validando as hipóteses de forma concreta, com a dobradura em mãos.

Ao questionar os estudantes, inicialmente, eles ficam em silêncio, voltam a explorar suas ações, e muitas inferências acontecem. Percebe-se que ao longo do processo o telefone celular é parte importante do processo, pois ocorrem registros de fotos, sejam elas das ações ou da alegria da prática, da mesma forma como solicitações de serem compartilhadas as resoluções naquele exato momento em grupos de WhatsApp da turma, com pais e com as redes sociais, tanto pessoais quanto da escola, sendo esse tipo de comportamento uma ação de apropriação do processo de desenvolvimento e aprendizagem de cada estudante, validando os seus conhecimentos, e tendo então a sala de aula um propósito mais próximo do que o estudante espera. Destaca-se que neste caso, o telefone celular não é um problema, e sim um aliado da prática docente. E isso acontece pois ele foi utilizado para muitas pesquisas relacionadas com a atividade, como por exemplo, responder um dos questionamentos feitos pela professora: *O que é bissetriz?* Assim, os alunos foram construindo seus algoritmos, pesquisando e descobrindo muitos conceitos relacionados, com o apoio digital, do telefone celular, e concreto, da dobradura por eles efetivamente desenvolvida, progredindo conforme a necessidade, ou reformulando e revalidando as ideias, até que todo o algoritmo se alinhasse plenamente.

Cabe destacar que alguns estudantes, em diferentes espaços, num primeiro momento, registraram os seguintes questionamentos: *“Por que construir algoritmos de dobraduras de papel e pensar sobre as dobraduras, se tem tudo na internet? E se já existem vídeos e muitos canais de artistas?”*. Desta forma, estes questionamentos motivaram a prática docente, que foi planejada sobre uma perspectiva investigativa, de tal maneira que mobilizasse o estudante aprender a aprender, e isso é o que torna o processo de aprendizado encantador.

Por exemplo, apresenta-se para os alunos algumas perguntas que geram muitos problemas, de tal forma que os estudantes precisam enunciar, cada um da sua maneira, e buscar resolver esses problemas: *“No vídeo ou canal que assistiu, explica por que as dobras realizadas na dobradura de papel funcionam? Consegue fazer essa dobradura com o triplo do seu tamanho final? Existe alguma relação entre a largura e altura do papel inicial com o resultado da dobradura? Esta*

dobradura pode ser feita com que tipo de papel para melhor desempenho?”. Essas perguntas são exemplos, inclusive de professores externos ao projeto, e em muitos momentos os colegas questionam a proposta dizendo: “*O que tem na internet não é algoritmo, são pessoas fazendo, e elas aprenderam talvez culturalmente, sem saber e entender cada passo, e o nosso algoritmo de início, e que criamos, é argumentado, então não tem comparação (...)*”, conforme relatou um estudante de 13 anos do nono ano do ensino fundamental de uma escola pública estadual da região atendida, em novembro de 2023.

Muitas vezes, os estudantes incrementam o algoritmo da construção da dobradura de papel proposto com outros passos, ou com desenhos, complementando e ilustrando o que se escreveu, ou outras formas de escrever. Desta forma, a apropriação dos mesmos ao pensamento computacional é tanto no sentido de interpretar e executar, quanto no sentido de aprimorar e otimizar, resolvendo e otimizando o problema. Sendo todo esse processo, no que tange a computação desplugada, um caminho autônomo de aprender a aprender, segundo (Bona, 2012) e (Piaget, 1973), sendo a dobradura de papel um objeto de pensar-com, segundo (Basso e Notare, 2015), e conforme (Papert, 1993) já denominada como objeto-de-fazer-pensar. Paralelamente, cria-se problemas investigativos pelos estudantes e por eles resolvidos (Bobsin et al., 2020), instigando o aluno a buscar as respostas ativamente, tornando-se parte efetiva do processo de construção da solução que se almeja.

4 Resultados: Dados das Oficinas

Um total de 184 estudantes das séries finais do ensino fundamental, e do ensino médio, além de 38 professores, participaram das oficinas. Os dados da pesquisa são muito diversificados, como: registros de dobras visíveis nas dobraduras, questionários, resultados de dobraduras, algoritmos criados, registros de explicações e diálogos, dentre outros, tanto dos estudantes quanto dos docentes participantes. Aqui neste artigo, registra-se os dados dos estudantes e professores, analisados e descritos primeiramente conforme os Algoritmos 1 e 2, para dois exemplos de algoritmos desenvolvidos, que foram nomeados por 2 estudantes, e que foram desenvolvidos por outros 2 estudantes, transcritos conforme a escrita dos estudantes.

Todas as turmas envolvidas são turmas regulares do ensino público, com uma grande diversidade em saberes e perfis, assim como realidades socioeconômicas distintas, com estudantes que muitas vezes se encontram dispersos da escola, mas que são motivados e encorajados quando provocados com atividades fora do comum, especialmente envolvendo tecnologias, mesmo quando apresentam dificuldades de manipulação das ferramentas necessárias por falta de contato e domínio digital, pois são muito curiosos

As duas dobraduras apresentadas nos Algoritmos 1 e 2 foram realizadas e compreendidas pelos participantes das oficinas sob três aspectos, classificadas em 3 etapas distintas:

Etapa 1 - Os participantes compreenderam o algoritmo, conseguindo executar e aprimorar o mesmo;

Etapa 2 - Os participantes compreenderam os conceitos de matemática relacionados com o processo e inferiram outros;

Etapa 3 - Os participantes conseguiram escolher uma tecnologia digital para fazer a transposição da dobradura para o mundo digital, ou seja, realizaram uma ação plugada, segundo seus próprios saberes.

1 - Com um quadrado marque as diagonais e as mediatriizes
2 - Junte as pontas do quadrado ao centro marcado no passo 1
3- Repete 4 (Marca um lado até a mediatriz - tendo a metade de um lado, ou $\frac{1}{4}$ do lado do passo 2)
4 - Puxa ou desdobra vértices opostos do quadrado do passo 3
5 - Levanta perpendicular a parede da caixa delimitada no passo 3, em ambos os lados, sendo paralelos
6 - Visualize por dentro, no plano do fundo, um quadrado de base com sobreposição de dois triângulos, daí nas paredes dos lados do passo 5, visualize um triângulo retângulo marcado com vértice que coincide com o do quadrado, isso acontece com todos os vértices do quadrado. Agora dobre para dentro a base deste triângulo, que dá a diagonal do quadrado sobreposto de fora, fazendo aos pares, primeiro de um lado da caixa, depois do outro. Quando dobrar as paredes que faltam surgem.
7 - Dobre a parede e o triângulo do quadrado que falta para completar em ambos os lados, e fim a caixa está pronta e toda dupla para ficar firme.

Reflexões que ajudam na dobradura:

A área do quadrado inicial de lado L tem sobra de 25% por causa do passo 6, ali temos um triângulo retângulo isósceles que em cada canto terá $\frac{1}{4}$ da área total. Mas esta serve para fixar substituindo a cola, e a tesoura.

(Algoritmo escrito por um estudante com TEA de 15 anos do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública em março de 2024).

Algoritmo 1: Algoritmo escrito da Caixa Organizadora - MaTLegal (Nome dado por uma estudante com 14 anos do 9º ano do ensino fundamental de uma escola pública estadual em dezembro de 2023). Fonte: Dados da pesquisa de 2023/2024.

Para os estudantes, especialmente na etapa 1, a proposta de trabalhar com as dobraduras desperta um encantamento quem nem sempre é observado em sala de aula, com aulas meramente expositivas e clássicas, promovendo uma sistemática diferente na condução desse momento escolar, tornando a aula plenamente participativa para todos, e também inclusiva, pois a aula também já foi planejada de múltiplas maneiras especialmente para ser acessível. Assim, os estudantes demonstraram interesse em fazer mais de uma dobradura de papel para presentear irmãos, amigos e familiares, e desenvolveram essas dobraduras com apoio dos colegas, sendo então uma atividade potencializada pela interação entre os pares.

Já na etapa 2, conforme a Tabela 1, 30% dos estudantes precisaram de algum apoio do professor ou bolsista (quando presente na oficina), 15% seguiram orientações dos colegas que já haviam conseguido entender melhor a linguagem, e os demais 55% desenvolvem-se num misto de pesquisar conceitos na internet, no caderno ou com colegas, e apresentaram uma autonomia de tentativas e ajustes conforme a necessidade.

E na etapa 3, conforme a Tabela 2, tem-se uma apropriação significativa da cultura digital. Então, 82% dos estudantes fizeram suas escolhas com base na etapa 2. Por exemplo: quem escolheu construir usando a geometria plana da dobradura, buscou como recurso um editor de imagem; quem decidiu explorar as relações entre as dobras e o resultado, buscou vídeos; e quem optou por mostrar propriedades, relações e funções (se existentes) com as medidas buscou por programas próprios da matemática, como é o caso da ferramenta GeoGebra, que os estudantes assim associaram como própria da matemática devido a presença do plano cartesiano. Os demais estudantes, que correspondem a 18%, apresentaram dificuldade com manuseio digital, ou seja, não demonstraram letramento digital suficiente para desenvolverem a proposta com autonomia, e precisaram de tutorial ou de algum material de apoio, até mesmo uma aula, sobre o recurso escolhido para uso.

A folha A4 tem base B e Altura H.

- 1 - Dobra metade de H
- 2 - Dobra metade de B
- 3 - Junta (sobrepõem) lado $B/2$ em $H/2$, repete ambos os vértices do retângulo (dimensões $B/2$ e $H/2$)
- 4 - O retângulo que sobra, com $H/2-B/2$ de altura e base B dobra um para cada lado
- 5- Abre o triângulo isósceles retângulo de base B e lados $B/2$ ($2)^{(\frac{1}{2})}$), formando um quadrado de lado $B/2$.
- 6- Dobra a diagonal do quadrado $B/2$, sendo para direções opostas, unindo vértices opostos do quadrado. Fica um triângulo isósceles retângulo de lado $B/2$ e base $B/2$ ($2)^{(\frac{1}{2})}$).
- 7- Repete passo 6, ficando com quadrado de lado $B/4$ ($2)^{(\frac{1}{2})}$).
- 8- Puxa levemente cada vértice unido do quadrado novo, na mesma direção, um para cada sentido. Aparecendo um o vértice de um triângulo interno que é o centro do triângulo.

Dicas matemáticas que ajudam na construção da dobradura de papel:

Ficando a base maior do barco comprimento B, e a altura do barco B/4.

Não dá para escrever em função do H, pois o $H = B + 2x$, sendo $x = H/2-B/2$.

(Algoritmo escrito por uma estudante de 14 anos do 8º ano do ensino fundamental de uma escola pública em junho de 2024)

Algoritmo 2: Algoritmo do barco de papel a partir de uma folha A4 (Nome dado por um estudante de 12 anos do 7º ano do ensino fundamental de uma escola pública estadual em junho de 2024). Fonte: Dados da pesquisa de 2023/2024.

Tabela 1: Acontecimentos da Etapa 2. Fonte: Dados da pesquisa de 2023/2024.

Estudantes	Acontecimentos da Etapa 2
30%	Precisaram de algum apoio do professor ou bolsista.
15%	Seguiram orientações dos colegas que já haviam conseguido entender melhor a linguagem.
55%	Desenvolvem-se num misto de pesquisar conceitos na internet, no caderno ou com colegas, e apresentaram uma autonomia conforme a necessidade.

Tabela 2: Acontecimentos da Etapa 3. Fonte: Dados da pesquisa de 2023/2024.

Estudantes	Acontecimentos da Etapa 3
82%	Escolheram o recurso digital com base no desenvolvimento da etapa 2.
18%	Apresentaram dificuldades na escolha do recurso digital, sem autonomia e letramento digital suficiente, precisando de auxílio e orientação, além de algum tipo de suporte como tutoriais e materiais de apoio.

É importante registrar que todos os estudantes conquistaram os objetivos das práticas nas 3 etapas, cada qual com seu tempo. Deste grupo dos 184 participantes, 21 eram estudantes de

inclusão (11,4%), com algum laudo de necessidade especial, sendo: 1 surdo, 2 com baixa visão, 8 com déficit de atenção e 10 com transtorno do espectro autista, e todos eles tiveram apoio dos colegas e pleno desenvolvimento com as adaptações necessárias, permitindo a eles que escolhessem o melhor tipo de algoritmo que deveria ser seguido conforme interesse (vídeo, por imagens, misto, escrito, lido por um leitor de telas, interpretado em Libras, etc). Os estudantes mais inquietos, como autistas ou aqueles com transtorno do déficit de atenção com hiperatividade, sentiram-se mais à vontade pois puderam andar livremente pela sala e se movimentar, sendo que alguns realizaram a atividade de pé. Além disso, os colegas puderam se organizar com grupos de afinidade, livremente, a fim de que todos pudessem realizar a atividade de forma satisfatória.

Também é importante ressaltar que as atividades aconteceram em horários de aula, e múltiplos encontros foram realizados, para dar continuidade ao trabalho desenvolvido, utilizando em torno de 6 períodos com cada turma, com média de 30 estudantes por turma, totalizando 184 estudantes atendidos.

Dos 38 professores participantes, 17 deles tiveram bastante agilidade e facilidade em todas as etapas, enquanto 19 tiveram dificuldade nas etapas 2 e 3, precisando de apoio e orientação. Além disso, na etapa 1, a troca com os estudantes promoveu um outro olhar para a atividade, e isso facilitou seu desenvolvimento; outros 2 professores tiveram muita dificuldade na etapa 1, e consequentemente nas demais, mas essas dificuldades foram resolvidas com oficinas individuais, e destaca-se que estes aplicaram a proposta em todas as suas turmas devido ao encantamento, propagando e disseminando a ideia do projeto. Os professores são de matemática, e alguns ministram disciplinas dos itinerários formativos da Base Nacional Curricular Comum (BNCC), como Cultura Digital, e Tecnologias para o Trabalho.

Um exemplo de recurso plugado utilizado para cada um dos Algoritmos 1 e 2 pode ser visualizado nas Tabelas 3 e 4, respectivamente, em conjunto com o resultado obtido pelos estudantes, demonstrado através de uma imagem resultante da dobradura.

Para o Algoritmo 1, o GeoGebra foi escolhido para ser apresentado aqui neste relato, mas muitos outros recursos foram propostos pelos estudantes. Para o Algoritmo 2, o *YouTube* foi um dos recursos plugados escolhidos, por exemplo, mostrando que foram diferentes as possibilidades escolhidas pelos estudantes. É possível observar nas Tabelas 3 e 4 que as soluções foram diversas, e que cada um dos estudantes, do seu jeito, escolheu os recursos com maior afinidade ou com mais interesse.

Já nas Tabelas 5 e 6, é possível observar os padrões de dobras visíveis obtidos para os Algoritmos 1 e 2, respectivamente, com exemplos de anotações desenvolvidas pelos estudantes, demonstrando assim que a proposta de oficina com o uso das dobraduras despertou a curiosidade e o interesse dos envolvidos.

Além dos recursos já apresentados, um dos grupos de estudantes decidiu seguir a apropriação plugada das dobraduras através do uso de planilhas eletrônicas, e desenvolveu uma forma de verificação dos seus padrões além do desenho, conforme Figura 1, usando uma planilha eletrônica.

Ao observar a Figura 1 é importante destacar o conceito de literacia da matemática, definido pelo Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), que enfatiza fortemente a necessidade de desenvolver a capacidade dos estudantes para usar a matemática no contexto da sala de aula em situações e experiências que lhes proporcionem investigar. E para isso, as dobraduras de papel são objetos-de-pensar, e as tecnologias atreladas a elas são objetos-de-pensar-com. Paralelamente, a capacidade dos estudantes em enunciar seus próprios problemas, desde organizar seus algoritmos das dobraduras de papel, e relações com a geometria plana em classificar triângulos quanto aos lados e aos ângulos, assim como as frações e proporções de

medidas, torna clara a capacidade deles de raciocinar sobre o uso adequado da matemática em diversos problemas, inclusive com programas 3D, de vídeos e planilhas, por exemplo.

Tabela 3: Exemplo de recurso e resultado para o Algoritmo 1. Fonte: Dados da pesquisa de 2023/2024.

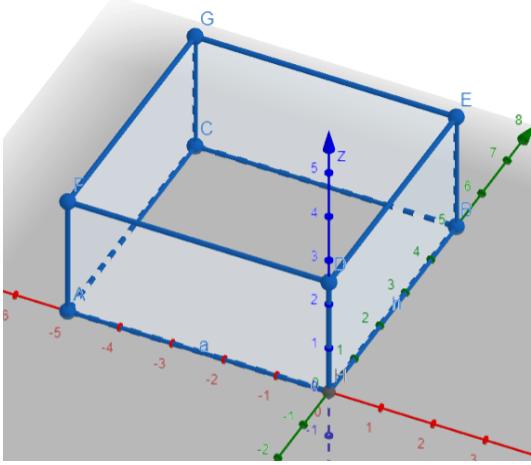
Recurso utilizado: GeoGebra 3D (construído com funções, interseções e relações de base 5 e altura 5/2).	Resultado da dobradura final:
 <p>Algoritmo 1 construído por um estudante com déficit de atenção do 9º ano do ensino fundamental em março de 2024.</p>	 <p>Foto segundo a perspectiva do estudante para o Algoritmo 1.</p>

Tabela 4: Exemplo de recurso e resultado para o Algoritmo 2. Fonte: Dados da pesquisa de 2023/2024.

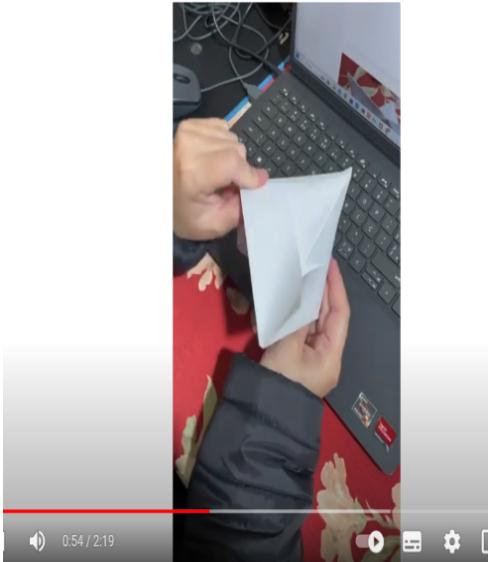
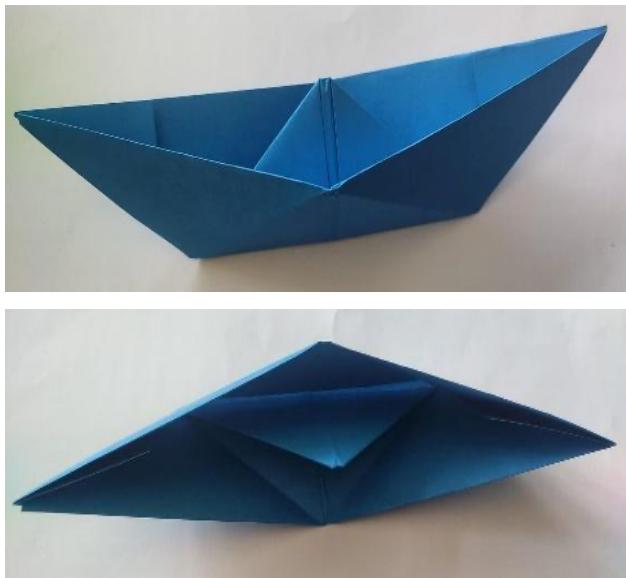
Recurso Utilizado: YouTube (vídeo postado para acesso dos colegas e da família, a fim de coletar comentários e sugerir ajustes no algoritmo escrito).	Resultado da dobradura final:
 <p>Algoritmo 2 feito por uma estudante de 17 anos do ensino médio, de forma remota, em maio de 2024.</p>	 <p>Fotos realizadas pela perspectiva de um estudante do ensino fundamental de 14 anos do 9º ano para o Algoritmo 2.</p>

Tabela 5: Padrões de dobras visíveis nas dobraduras e anotações para o Algoritmo 1. Fonte: Dados da pesquisa de 2023/2024.

The image shows a red sheet of paper with numerous fold lines and some handwritten notes. Next to it is a whiteboard with mathematical calculations related to the folds:

$$\frac{8l}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{D}$$

SOBRAS: $\frac{1}{4} L^2 \rightarrow \frac{1}{4} \equiv 25\% A_c$
DENTRO

$$4l = l\sqrt{2}$$

$$A_T = l^2$$

FOUR

$$A_{TCAIXA} = 2 \cdot \frac{3l^2}{8} = \frac{3l^2}{4}$$

$$\frac{1}{4} L^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{4l}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{16l^2}{4 \cdot 2} = 2l^2$$

4 CANTOS = 8 1/2
DE 2 1/2 + 2 1/2 = 10 1/2 + 2 1/2 = PRETO #

Os padrões encontrados aqui foram obtidos de forma coletiva por um trio de estudantes, junto com o estudante que fez o Algoritmo 1 escrito. Foi um trabalho cooperativo. E eles fizeram anotações, além de um vídeo postado no Instagram da escola para os pais e amigos aprenderem. Os estudantes vão além dos padrões das dobras, e refletem inclusive sobre as sobras de papel.

Tabela 6: Padrões de dobras visíveis nas dobraduras e esboços para o Algoritmo 2. Fonte: Dados da pesquisa de 2023/2024.

The image shows a blue sheet of paper with fold patterns and some handwritten notes. To the right is a 3D coordinate system diagram illustrating geometric relationships:

3D Coordinate System Diagram:

- Point E: $(0, 0, 0)$
- Point F: $(5, -3, 3)$
- Point B: $(-5.02, 2.07, 3)$

O estudante que fez estas anotações da esquerda, para o Algoritmo 2, já tinha conseguido estabelecer as relações sem a necessidade de visualizar as dobras, mas ao apresentar o trabalho para os colegas achou mais fácil ir desenhando e explicando. Ele geralmente faz as atividades primeiro sozinho, e depois de forma coletiva. A resolução da direita foi construída por um estudante do ensino médio, de 15 anos, que estava interessado em estabelecer relações físicas com o barco.

Área de Transferência		Fonte	Alinhamento		Número
B2					
		=A2*4/(2^(1/2))			
1	A	B	C	D	E
1	L do quadrado inicial	Base da Caixa	Altura da Caixa		Área total da Folha
2	5	14,14	7,07		Área total da Sobra
3	Fórmulas Escondidas	A2*4/(2^(1/2))	B2/2	A2^2	(3/4)*E2
4	Base da Caixa	Altura da Caixa	L do quadrado inicial		E2-F2
5	14,14	7,07	5		G2/E2
6	B2	A5/2	(A5/4)*(2^(1/2))		
7					
8					
9					

Figura 1: Desenvolvimento da relação do lado do quadrado da caixa com o lado da folha e vice-versa, para o Algoritmo 1, por uma estudante de 15 anos do primeiro ano do médio. Fonte: Dados da pesquisa de 2023/2024.

A cada dobradura apresentada aos alunos, em grupos de até 3 estudantes, havia pelo menos 2 deles que traziam novas propostas que aprenderam ou pesquisaram, nos próximos encontros das oficinas, tornando o processo do aprendizado mais dinâmico e reflexivo, permitindo que os estudantes testassem suas dobraduras antes mesmo de apresentá-las aos colegas.

Cabe destacar que na mesma turma de uma oficina as escolhas são diferentes quanto aos algoritmos, e também quanto às tecnologias digitais escolhidas. Por exemplo, na turma dos alunos que utilizaram a planilha da Figura 1, um grupo de estudantes desenvolveu uma história em quadrinhos para mostrar seus apontamentos; enquanto na turma que fez uso de vídeo do *YouTube* os estudantes criaram um fluxograma no *Genially* para explicar em passos visuais e escritos, com demonstrações de matemática das relações, semelhantes ao algoritmo escrito do barco demonstrado no Algoritmo 2 e nas Tabelas 4 e 6, que o estudante já explica os padrões de matemática no próprio algoritmo de construção. Ao todo, 15 tecnologias digitais diferentes foram escolhidas e utilizadas pelos estudantes, dentre as quais apenas algumas foram demonstradas neste trabalho.

5 Categorias para as Dobraduras de Papel

Diante das 32 dobraduras autorais desenvolvidas no projeto, das quais apenas 2 foram apresentadas neste artigo, a equipe de execução deste trabalho decidiu classificar as dobraduras de papel em três categorias conforme (Santos et al., 2024) de acordo com a sua utilidade, mas que se relacionam e podem ser ajustadas conforme a prática docente e o olhar do estudante, além de estarem presentes em mais de uma das categorias.

1) Dobraduras úteis: dobraduras que são desenvolvidas com o propósito de servir para uma determinada finalidade, como um porta telefone celular, uma carteira, um organizador, um cartão, um marcador de páginas, um livreto, caixas de diferentes tamanhos e formas, ou um anjo, por exemplo.

2) Dobraduras para ensinar: são aquelas utilizadas com o propósito de ensinar algum conteúdo, como a construção de uma bola que relaciona pentágonos e hexágonos para sua devida composição (Caruso et al., 2024), a construção de uma estrela (Magalhães et al., 2023), de uma espiral pitagórica, de um tetraedro, de um cubo, do barco de papel (Germano et al., 2024B), da menina que dança ballet, da boca de um sapo, dentre outras. Todas essas dobraduras permitem que o estudante observe as dobras, verifique os ângulos e perceba as relações entre as formas geométricas que surgem e que se relacionam com as medidas finais da dobradura, contribuindo para o ensino da matemática.

3) Dobradura para brincar: são aquelas desenvolvidas apenas com a intenção de proporcionar diversão, sem a necessidade de investigações matemáticas, que podem inclusive serem aplicadas com o público infantil, como a dobradura do cachorro, do gato, da raposa, do passarinho, do coração, do peixe, da flor, da estrela, do avião de papel e do barco, sendo que estas três últimas possuem pelo menos de 3 a 4 tipos de algoritmos desenvolvidos pela equipe do projeto, respectivamente.

Muitas das dobraduras desenvolvidas no projeto já foram amplamente testadas, e ancoradas em diferentes formas de propor o algoritmo para que seja acessível a todos os estudantes, porque a pesquisa se preocupa e objetiva contemplar também a educação inclusiva. Para isso, inclusive, a equipe de execução do projeto conta com a participação de uma psicóloga no grupo, e ao aplicar as práticas nas escolas os estudantes inclusos têm uma diversidade de necessidades, e a proposta permite a todos a realização das atividades com encantamento, já que tudo está adaptado e também planejado para eles e por eles. E esse planejamento é feito desde o início dos algoritmos das dobraduras, quando se questiona os bolsistas e voluntários do projeto a pensar em todos, então coloca-se em prática a perspectiva do planejar inverso, que é planejar inclusivo, segundo (Bona, 2023), bem como (Bona e Cazzarotto, 2022). Além disso, conforme apresentado por (Germano, 2024), a dobradura pode ser um recurso extremamente importante para permitir um melhor aprendizado ao aluno com deficiência visual, servindo assim como um recurso altamente inclusivo que pode ser facilmente utilizado nas aulas de matemática. Ou seja, o planejamento de cada dobradura se dá de múltiplas formas, permitindo assim que conteplete a turma toda, uma vez que cada estudante pode escolher se quer realizar sua dobradura com base em um algoritmo escrito, visual, misto, com a possibilidade de ser interpretado em Libras, de um leitor de tela ou com a possibilidade de um vídeo, por exemplo, contemplando assim todos os alunos de inclusão atendidos neste trabalho, sem a necessidade de outras adaptações mais específicas além dessas que já são propostas originalmente pelo projeto, a fim de que possam contemplar de forma universal todos os estudantes, sem distinções, diante de múltiplos métodos. Desta forma, cada dobradura possui mais de um tipo de algoritmo, permitindo a troca entre os pares e o coletivo, para que todos possam se ajudar no desenvolvimento em busca do resultado final, proporcionando assim mais uma forma de acessibilidade para os estudantes, acompanhando os colegas e fazendo trocas.

6 Considerações Finais: da Prática para a Teoria

A pesquisa dispõe de muitos resultados sobre diferentes perspectivas, mas este artigo objetiva compartilhar os resultados quanto aos conceitos de matemática presentes nos algoritmos das dobraduras de papel através da exploração dos padrões visíveis das dobras. Estes padrões foram explorados pelos estudantes de diferentes maneiras: ao fazer a dobradura; depois marcando e abrindo a dobradura; com medições; e depois com outros conceitos verificados por diferentes ramos da matemática. E eles são potencializados quando atrelados às tecnologias digitais, pois para fazer a transposição do algoritmo do papel para o digital exige dos estudantes diferentes linguagens e/ou simbologias de matemática, bem como uma apropriação digital, que ainda significa necessariamente conhecer linguagens de programação, mas quanto a simbologia das dobraduras, a escrita em planilhas eletrônicas, bem como a escrita de equações e pontos no GeoGebra, por exemplo. Além disso, os estudantes exploraram outras escritas que fazem acesso às tecnologias da informação e da comunicação, e testaram múltiplas possibilidades, investigando a melhor maneira de demonstrar os resultados.

Tais transposições somente são possíveis pelos estudantes, segundo (Bona, 2012) e (Fiorentini e Lorenzato, 2009), pois a aula é proposta numa perspectiva de investigar, de pesquisar, de enunciar, e de resolver problemas, assim como citado por (Wing, 2006), e nesse

processo de aprender a aprender, os estudantes entendem novamente o espaço da sala de aula, e a sua responsabilidade sobre esse processo que é além do tempo da sala de aula, e que atualmente pode ser mediado por tecnologias digitais, de qualquer lugar.

Enfim, nessa prática investigativa estão presentes as 3 formas de contemplar as tecnologias descritas pela (OECD, 2023), e elas asseguram que a aula é mais importante que o telefone celular, ou melhor, que este pode esperar quando utilizado apenas para fins de lazer, porque depois de aprender, e aproveitar este momento de aprendizado, com a ajuda das tecnologias digitais, o estudante pode ter uma bagagem com pensamentos e conhecimentos para compartilhar com amigos, família e nas suas próprias redes sociais, se apropriando de fato do conhecimento obtido através das suas vivências e experiências.

Desta forma, os principais pontos observados com a prática refletida neste trabalho podem ser listados abaixo:

- 1) O engajamento dos estudantes com a proposta das dobraduras de papel e seus problemas investigativos foi nítido;
- 2) A necessidade social de compartilhar em redes sociais todas as experiências que apresentam um real significado na vida dos estudantes, a fim de validar que aquele aprendizado foi efetivo, dando inclusive visibilidade para a escola, que ganha um espaço de destaque quando tais atividades, como as dobraduras de papel, são publicadas nas redes sociais;
- 3) Os saberes de matemática dos estudantes diferem das teorias trazidas pelos livros didáticos pois estão relacionados com as vivências de uma geração de interatividade excessiva e imediatista com as tecnologias digitais, fazendo com que esses conhecimentos adquiridos tenham maior significado aos estudantes quando mediados pela tecnologia digital;
- 4) As tecnologias digitais são pouco exploradas pelos estudantes para desenvolver conhecimento, mas muito utilizadas para socializar, como é o exemplo de uso de redes sociais, que a maioria dos estudantes utiliza;
- 5) A apropriação dos conceitos de matemática acontece de forma exploratória, e depois mais abstrata e genérica, e acaba sendo comprovada tanto de forma desplugada quanto plugada, por meio da própria ação de investigar e explorar dos estudantes, tornando-os parte ativa de todo esse processo.

Assim, a prática docente que proporciona a emancipação e autonomia do estudante está ancorada na pesquisa e no diálogo, que parte do docente ao planejar, mas que se concretiza na mobilização dos estudantes, permitindo assim um contínuo aperfeiçoamento ao docente e ressignificando o espaço de aprendizado para todos.

Por fim, as criações que são as resoluções dos estudantes diante dos problemas enunciados com as dobraduras de papel são práticas, que após a realização de algumas dobraduras diferentes, se transformam em teorias para os estudantes, pois eles criam um arcabouço próprio de saberes de matemática por eles padronizados que se repete nas dobraduras de papel. Então estes saberes se tornam apropriações conceituais aos pesquisadores em áreas como Informática na Educação e Educação Matemática e suas Tecnologias, indo assim além dos objetivos de pesquisa almejados, e logicamente além da estrutura curricular das aulas de matemática, especialmente conforme o relato e a conduta dos 38 professores que participaram ativamente desta pesquisa. Nitidamente, com base em relatos recebidos, os estudantes conseguiram identificar padrões, e fazer relações de medidas com as dobraduras utilizadas, e isso trouxe bastante satisfação para os envolvidos, pois eles deduziram essas informações por conta própria, gerando uma satisfação nítida pela descoberta. Além disso, muitos encararam o uso de uma ferramenta digital como desafio, e foram bastante pró-ativos para descobrir como lidar com as ferramentas escolhidas quando não havia uma grande familiaridade no uso dessa ferramenta. Nitidamente, os estudantes ficaram muito

contentes com a escolha da metodologia aplicada, por ser uma metodologia única e diferenciada do contexto escolar tradicionalmente expositivo.

Toda a aplicação do trabalho se resume em uma metodologia colaborativa e investigativa. Alguns estudantes demonstraram uma maior resistência inicial, mas em poucos minutos todos se dividiram em grupos e trabalharam de forma coletiva, onde havia ajuda mútua entre os grupos, especialmente para aqueles que escolheram métodos diferentes para a realização da dobradura. Assim, houve um movimento acolhedor, de forma que eles se sentiam à vontade para esclarecer dúvidas e pedir orientações quando necessário. Mesmo os estudantes com alguma situação de inclusão, não demonstraram grandes dificuldades no manuseio das dobraduras. As dificuldades mais perceptíveis foram a ausência de conceitos prévios de matemática necessários ou o manuseio das ferramentas digitais. Toda e qualquer dúvida foi sanada e auxiliada pela equipe de execução, e a grande maioria apresentou interesse em pesquisar e descobrir como utilizar as ferramentas digitais escolhidas.

De maneira geral os professores participantes adoraram a apropriação e as associações realizadas com as dobraduras, com a lógica de marcar as dobras e desfazer, para então encontrar as relações matemáticas e posteriormente criar modelos para os problemas investigativos relacionados com cada dobradura proposta.

Além disso, os professores participantes registraram que os estudantes geralmente desejam compartilhar suas produções de dobraduras de papel com as outras turmas, e não somente através de uma projeção com slides expositivos, mas como oficinas aos colegas quanto às tecnologias digitais escolhidas. Isso evidencia cada vez mais o processo de aprender a aprender de cada estudante, e demonstra que a sala de aula é um espaço essencial para promover metodologias investigativas que instigam curiosidades, já que as informações estão disponíveis na palma da mão dos estudantes, o tempo todo, em seus telefones, mas a metodologia de sala de aula é que proporcionará o que buscar, aprender e pesquisar, guiando e conduzindo os estudantes pelos caminhos que proporcionarão as descobertas.

Conforme dito por (Germano et al., 2024A), integrar o pensamento computacional, a matemática e as habilidades práticas por meio das dobraduras permite capacitar os alunos a se tornarem pensadores independentes e críticos, preparados para enfrentar os desafios da vida cotidiana, fortalecendo o currículo escolar, e inspirando uma nova geração de estudantes a explorar o mundo ao seu redor com olhos curiosos e mente aberta.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), e da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Referências

- Abe, Hisashi. Sugoizô Origami. Tókio: Nippon Hyoronsha Co. Ltd., 2003.
- Andrade, A. de O.; Silva, I. P.; Pina, M. O. M. Digital Technologies in Mathematics Education. *Journal of Interdisciplinary Debates*, [S. l.], v. 4, n. 01, p. 97–122, 2023. <https://doi.org/10.51249/jid.v4i01.1255> [GS Search]
- Bacich, L.; Neto, A. T.; Trevisani, F. M. (2015). Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso. [GS Search]

- Basso, M.; Notare, M. R. (2015). Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. Revista Novas Tecnologias na Educação, Porto Alegre, v. 13, n. 2, 2015. <https://doi.org/10.22456/1679-1916.61432> [GS Search]
- Bobsin, R. S.; Nunes, N. B.; Kologeski, A. L.; Bona, A. S. (2020). “O Pensamento Computacional presente na Resolução de Problemas Investigativos de Matemática na Escola Básica.” Em: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE). Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2020. pág. 1473-1482. <https://doi.org/10.5753/cbie.sbie.2020.1473> [GS Search]
- Bona, A. S. (2012) “Espaço de Aprendizagem Digital da Matemática: o aprender a aprender por cooperação”, Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação. Porto Alegre: UFRGS. Disponível em: [\[link\]](#). [GS Search]
- Bona, A. S. (2023). Planejamento “Inclusivo” em Educação Matemática: a partir de Questões de Processos Seletivos. Anais da modalidade comunicação científica da VIII EIEMAT - Escola de Inverno de Educação Matemática. UFSM, Santa Maria, 2023. Disponível em: [\[link\]](#).
- Bona, A. S.; Basso, M. V. de A. Modelagem de Matemática em Situações Criativas e o Algoritmo mediado pelo Pensamento Computacional. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA (WIE), 29., 2023, Passo Fundo/RS. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2023. p. 213-224. <https://doi.org/10.5753/wie.2023.234379> [GS Search]
- Bona, A. S.; Rocha, K. C.; Basso, M. V. de A. Uma Prática Investigativa com Dobraduras ancorada no Pensamento Computacional e na Abstração Reflexionante. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA (WIE), 29., 2023, Passo Fundo/RS. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2023. p. 202-212. <https://doi.org/10.5753/wie.2023.234378> [GS Search]
- Bona, A. S. D; Cazzarotto, S. A sensibilidade e o poder da aprendizagem na audiodescrição de representações de Matemática na Educação Básica e Profissional: uma prática inclusiva para todos. In: SOUZA, A., et al.(orgs). Mosaico Acessível. Maringá, PR: Gráfica e Editora Massoni, 2022. Disponível em: [\[link\]](#). [GS Search]
- Carneiro, M; Spira, M (2015). Oficina de Dobraduras. Rio de Janeiro, IMPA, 2015. Disponível em: [\[link\]](#).
- Caruso, R. M.; Kologeski, A. L.; Bona, A. S. de. O Sólido de Arquimedes e a Copa do Mundo: Um Relato de Experiência Envolvendo Atividades Plugadas e Desplugadas. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO (SBIE), 35., 2024, Rio de Janeiro/RJ. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2024. p. 2125-2135. <https://doi.org/10.5753/sbie.2024.242243> [GS Search]
- D'Ambrosio, U. Educação Matemática: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996. [GS Search]
- Fiorentine, D.; Lorenzato, Sergio. Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3ª Edição Revisada. Campinas: Autores Associados, 2009, p. 193-206.
- Fioreze, L. A.; Halberstadt, F. F (Orgs.) (2021). Aprendizagens e Vivências no Ensino de Matemática em tempos de pandemia. Porto Alegre, RS: Editora Fi, 2021. Disponível em: [\[link\]](#). [GS Search]
- Germano, R. A; Bona, A. S. D. A Dobradura E O Uso Pensamento Computacional No Período de Sondagem nas Aulas de Matemática. Mostra de Ensino, Pesquisa e Extensão (MoExP), 13º Edição, 2023, Osório - RS. Resumos. Disponível em: [\[link\]](#).
- Germano, R. A. A Integração de Dobraduras e o Pensamento Computacional na Educação Matemática para Alunos com Deficiência Visual no Ensino Básico. 2024. 103 f. Trabalho de

- Conclusão de Curso Licenciatura em Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - Campus Osório, Osório, RS, 2024. Disponível em: [\[link\]](#). [\[GS Search\]](#)
- Germano, R. A; Nunes, N. B; Bona, A. S. D. Espirais E Molas Na Matemática: Dobraduras E Pensamento Computacional. Educação, trabalho e transformação social: caminhos para uma práxis pedagógica emancipatória. In: Albuquerque Junior, Ailton Batista de (Roinuj Tamborindeguy); Pereira, Gabriel Silveira; Rocha, Bruna Beatriz da; Ivanicska, Rebeca Freitas (orgs.). Educação, trabalho e transformação social: caminhos para uma práxis pedagógica emancipatória. Itapiranga: Schreiben, 2024. p. 308-318. e-book. Disponível em: [\[link\]](#).
- Germano, R. de A.; Nunes, N. B.; Bona, A. S. de. Explorando Funções Lineares através da Dobradura do Barco: Uma Abordagem Interativa para a Educação Matemática. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO (SBIE), 35. , 2024, Rio de Janeiro/RJ. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2024 . p. 2079-2088. <https://doi.org/10.5753/sbie.2024.242140> [\[GS Search\]](#)
- Lang, R. J. Origami and Geometric Constructions, 1996. Disponível em: [\[link\]](#). [\[GS Search\]](#)
- Magalhães, M. B.; Bona, A. S. De; Kologeski, A. L.; Mattos, V. D. P. de. Um “Objeto de Fazer Pensar” Desplugado, Plugado e Maker: a Estrela de Dobradura. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA (WIE), 29., 2023, Passo Fundo/RS. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2023. p. 1090-1100. <https://doi.org/10.5753/wie.2023.235053> [\[GS Search\]](#)
- Martin, George E. Geometric Constructions. Undergraduate Texts of Mathematics. Nova York: Springer Verlag, 1998.
- Matsubara, R.; Cecconello, A. C.; Costa, J. A.; Bona, A. S.; Lemos, J.; Kologeski, A. Uma Oficina de Dobradura de Sacolas Plásticas Aliando o Pensamento Computacional com Atividades Desplugadas no Ensino Fundamental. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA (WIE), 29., 2023, Passo Fundo/RS. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2023. p. 192-201. <https://doi.org/10.5753/wie.2023.234375> [\[GS Search\]](#)
- Nóvoa, A.; Alvim, Y. Escolas e Professores: proteger, transformar e valorizar. Salvador, Bahia:Sec/Iat, 2022,112p. Disponível em: [\[link\]](#).
- OECD (2023), *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*, PISA, OECD Publishing, Paris. <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>
- Papert, S. (1993). “Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas”. Basic Books, Nova York: 1993. <https://dl.acm.org/doi/pdf/10.5555/1095592> [\[GS Search\]](#)
- Piaget. Para onde vai a educação? Rio de Janeiro: Livraria José Olympo Editora/Unesco, 1973. [\[GS Search\]](#)
- Santos, A.; Teixeira, A. (2019) A formação de professores e a importância da Fluência Tecnológica Digital em meio ao cenário do século XXI. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA (WIE), 25., 2019, Brasília. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2019. p. 831-838. <https://doi.org/10.5753/cbie.wie.2019.831> [\[GS Search\]](#)
- Santos, L. T; Guerra, L. C; Portal, L. S. L; Bona, A. S. D. Dobraduras E A Computação (Des)Plugada: Uma Prática Necessária Para Educação Básica. Educação, trabalho e transformação social: caminhos para uma práxis pedagógica emancipatória. In: Albuquerque Junior, Ailton Batista de (Roinuj Tamborindeguy); Pereira, Gabriel Silveira; Rocha, Bruna Beatriz da; Ivanicska, Rebeca Freitas (orgs.). Educação, trabalho e transformação social:

- caminhos para uma práxis pedagógica emancipatória. Itapiranga: Schreiben, 2024. p. 319-328. Disponível em: [\[link\]](#).
- Silva, G. P. S., Lucena, C. S., Souza, E. C., Cavalcante, M. S. (2021) “ A utilização do origami como ferramenta auxiliar no ensino de geometria plana.” Em: VII CONEDU - Conedu em Casa. Campina Grande: Realize Editora, 2021. Disponível em: [\[link\]](#). [\[GS Search\]](#)
- Souza, K. L.; Silva, G. G.; Bona, A. S. (2023) O uso de tecnologias digitais na combinação de modelos híbridos para o ensino de função afim. In: WORKSHOP EM ESTRATÉGIAS TRANSFORMADORAS E INOVAÇÃO NA EDUCAÇÃO (WETIE), 1., 2023, Passo Fundo/RS. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2023. p. 42-51. <https://doi.org/10.5753/wetie.2023.236118> [\[GS Search\]](#)
- Tori, R. (2010), Educação sem distância: as tecnologias interativas na redução de distâncias em ensino e aprendizagem. São Paulo: Editora Senac. [\[GS Search\]](#)
- Vicari, R. M.; Moreira, A. F.; Menezes, P. F. B. (2018). Pensamento Computacional - Revisão Bibliográfica. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre/RS. Disponível em: [\[link\]](#). [\[GS Search\]](#)
- Villalta, R. A. A.; SILVA, Lilian Bartira Santos. Espaços de afinidade: teoria e prática do uso de redes sociais na sala de aula. In: CONGRESSO SOBRE TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO (CTRL+E), 6., 2021, Evento Online. Anais [...]. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2021. p. 472-478. Disponível em: [\[link\]](#). [\[GS Search\]](#)
- Wing, J. M. Computational Thinking. Communications of the ACM. New York, v.49, n.3, p. 33-35, mar. 2006. <https://dl.acm.org/doi/10.1145/1118178.1118215> [\[GS Search\]](#)