

Desenvolvimento de Ferramenta Computacional Para o Ensino e Aprendizagem do Cálculo Numérico

Victor de Almeida Vieira¹, Lis Custódio²

¹Instituto Politécnico – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

²Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

vvieira.eng@gmail.com, liscustodio@ime.uerj.br

Abstract. *Numerical calculation is a subject present in the curriculum of most undergraduate courses in exact sciences. The subject consists of the study and application of numerical methods for approximating, among other topics, roots, interpolation and integrals of functions, and solutions of systems of equations. This work proposes the development of a computational tool that assists in teaching and learning numerical calculation. The tool, called "CN Visual", was developed in the form of a web application, which can be accessed from any computer with internet access, without the need for installation. Aiming for greater user interaction with the tool, features were implemented that allow the manipulation of input data, control of graphic elements and animations that enable a better understanding of the exposed methods. The proposed tool was evaluated through a study carried out with potential users, which showed positive results in terms of usability, ease of learning and user satisfaction.*

Resumo. *O cálculo numérico é uma disciplina presente na grade curricular de grande parte dos cursos de graduação em ciências exatas. A disciplina consiste no estudo e aplicação de métodos numéricos para aproximação de, entre outros tópicos, raízes, interpolação e integrais de funções, e soluções de sistemas de equações. Esse trabalho tem como proposta o desenvolvimento de uma ferramenta computacional que auxilie no ensino e na aprendizagem do cálculo numérico. A ferramenta, batizada de "CN Visual", foi desenvolvida na forma de um aplicativo web, que pode ser acessado de qualquer computador com acesso à internet, sem a necessidade de instalação. Visando uma maior interação do usuário com a ferramenta, foram implementadas funcionalidades que permitem a manipulação dos dados de entrada, controle dos elementos gráficos e animações que possibilitam uma melhor compreensão dos métodos expostos. A ferramenta proposta foi avaliada por meio de um estudo realizado com possíveis usuários, o qual apresentou resultados positivos em relação a usabilidade, facilidade de aprendizagem e satisfação do usuário.*

1. Introdução

O cálculo numérico é a área da matemática que estuda e desenvolve algoritmos utilizados para obter aproximações numéricas para problemas analíticos, com aplicações nas mais diferentes áreas.

Em seu trabalho “*Guidelines for the use of advanced numerical analysis*”, Potts [Potts 2002] escreveu sobre a aplicabilidade de métodos numéricos em cálculos de engenharia geotécnica. No trabalho “*Combining numerical analysis and engineering judgement to design deployable structures*”, Gantes [Gantes et al. 1991] apresenta as vantagens da utilização de métodos numéricos para aproximar simulações de estruturas expansivas de aeronaves. A economia também faz uso frequente de cálculo numérico, no artigo “*Numerical methods in economics*”, Judd [Judd 1998] demonstra o uso de métodos de aproximação de raízes, solução de sistemas, aproximações de integrais, diferenças finitas dentre outros. Esses métodos são aplicadas principalmente em modelos desenvolvidos pelos economistas, como a precificação de opções. No trabalho citado, dado o valor de *strike* da opção, o valor do ativo e a série histórica do preço da opção é possível calcular o “preço correto” para esse derivativo. Das et al. [Das et al. 2013] trazem em seu artigo “*Numerical analysis for determination of the presence of a tumor and estimation of its size and location in a tissue*”, o cálculo numérico é utilizado também na biologia. Neste trabalho foi avaliada a possibilidade de aplicar o método de volumes finitos (um método que utiliza os conceitos de cálculo numérico) na equação de transferência de calor de tecidos para auxiliar na detecção de tumores.

O Cálculo Numérico tem sido alvo de estudo de grandes cientistas por séculos, como Newton (1643 – 1727) e Lagrange (1736 – 1813), que contribuíram imensamente para a discussão e desenvolveram métodos que são amplamente utilizados até os dias atuais [Brezinski and Wuytack 2001].

Hoje, os principais conceitos do cálculo numérico, constituem uma disciplina presente na maioria dos cursos de graduação na área de ciências exatas, como as engenharias, matemática, física e economia. De uma maneira geral, a disciplina consiste no estudo de métodos numéricos que permitem que, através da discretização do domínio, sejam encontradas aproximações para a solução de problemas cuja solução analítica é complexa ou não existe.

O desenvolvimento de ferramentas educacionais adequadas para o auxílio no processo de aprendizagem nos cursos de graduação dará condições para que o estudante prossiga na construção do seu conhecimento de forma cooperativa. Nesta direção, o emprego das técnicas computacionais podem trazer resultados pedagógicos benéficos, desde que seu uso seja corretamente planejado e recursos humanos sejam devidamente qualificados [Neto and Imamura 2005].

No presente trabalho propomos uma ferramenta computacional destinada ao ensino e aprendizagem do cálculo numérico, que apresenta uma interface simples e intuitiva, com recursos que permitem a manipulação dos dados de entrada, interação com os gráficos gerados e animações ilustrando as iterações dos métodos implementados. A ferramenta desenvolvida foi batizada de CN Visual - uma analogia ao Cálculo Numérico e ao conceito de auxiliar na compreensão dos métodos, principalmente, através do estímulo visual.

2. Ferramentas Computacionais Aplicadas à Educação

Segundo [Laudares and Lachini 2000], o repensar da ação acadêmica aponta para a emergência de novas bases sobre as quais possa ser apoiada e reformulada a conduta do docente, não mais como agente ativo e exclusivo da transmissão do saber, mas como

coordenador e facilitador de múltiplas atividades na construção do conhecimento. Uma nova postura que abre espaço para o diálogo, para a efetividade de um processo didático, em que professor e aluno são atores. Esta busca pela motivação para o processo de ensino-aprendizagem nos faz refletir e questionar sobre as ferramentas didáticas que temos utilizado.

Nesta direção, temos nas ferramentas computacionais um instrumento de grande importância no apoio à pesquisa, ao ensino e as atividades de profissionais das mais diversas áreas. O desenvolvimento de ferramentas educacionais adequadas para o auxílio no processo de aprendizagem nos cursos de graduação dará condições para que o estudante prossiga na construção do seu conhecimento de forma cooperativa. No entanto, no desenvolvimento de uma ferramenta computacional é preciso se observar critérios e parâmetros necessários de usabilidade para assegurar a sua eficácia.

A metodologia heurística, desenvolvida por Nielsen e Mack [Nielsen and Mack 1994], apresenta uma forma simples de avaliar interfaces de *softwares*, baseada na avaliação dos 10 pilares listados abaixo.

1. Visibilidade do estado do sistema;
2. Linguagem do sistema ser a mesma do usuário;
3. Controle e liberdade do usuário;
4. Consistência e padrões;
5. Prevenção de erros;
6. Preferência do “reconhecimento” à “lembraça”;
7. Flexibilidade e eficiência no uso;
8. *Design* atrativo e minimalista;
9. Ajudar o usuário a reconhecer, diagnosticar e solucionar erros;
10. Ajuda e documentação.

Como apresentaremos na Seção 4, baseado nos pilares propostos por Nielsen e Mack, desenvolvemos a ferramenta proposta neste trabalho, o CN Visual.

2.1. Uso de ferramentas computacionais aplicadas ao ensino do Cálculo Numérico

Para ilustrar a relevância do uso de ferramentas computacionais adequadas no ensino do Cálculo numérico, nesta seção descreveremos brevemente um dos tópicos da disciplina, destacando os pontos onde o uso das funcionalidades da ferramenta proposta neste trabalho resultariam em uma melhor compreensão do método.

Dada uma função real f , considere o problema de encontrar as raízes de f , ou seja, os valores reais x para os quais $f(x) = 0$. A princípio, pode parecer um problema específico, no entanto, as abordagens para solução desse tipo de problema pode ser utilizada toda vez que tivermos uma equação a ser resolvida. Observe que uma equação nada mais é do que uma expressão do tipo:

$$f_1(x) = f_2(x), \quad (1)$$

onde procuramos os valores de x que satisfazem a igualdade, o que é equivalente a procurarmos pelas raízes da função $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

Para algumas funções, como polinômios de segundo grau, existem equações que permitem encontrar o valor exato de suas raízes, no entanto, existem funções em que esse

trabalho não é tão trivial. Uma das abordagens para simplificar esse processo é utilização do cálculo numérico, através da aplicação de métodos que permitem encontrar valores aproximados para as raízes de uma dada função.

A aproximação dos valores das raízes da função é obtida através do que chamamos de métodos iterativos, nos quais a partir de uma estimativa inicial é gerada uma sequência de soluções aproximadas que convergem para a solução do problema. Esses métodos diferem entre si em relação ao seu custo computacional, velocidade e condições de convergência da sequência gerada.

O método de Newton-Rapshon, por exemplo, é uma poderosa ferramenta para resolver numericamente uma equação. Dada uma função $f(x)$, a partir de uma estimativa inicial x_0 para a raiz r da função f , sob condições apropriadas, é possível construir uma sequência de números reais $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, convergindo para r [Ruggiero and da Rocha Lopes 1996].

A sequência é construída através da aproximação linear de f na vizinhança da aproximação inicial x_0 .

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) * f'(x_0) \quad (2)$$

Dessa forma, fazendo na Equação 2, $f(x) = 0$, teremos:

$$r \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (3)$$

Definimos como x_1 essa nova aproximação para r e repetimos o processo, construindo assim uma sequência de aproximações para a raiz da função f da forma:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (4)$$

Esse processo é repetido, sucessivamente, até que $f(x_n)$ seja pequeno o suficiente, ou seja $|f(x_n)| < \epsilon$, para um ϵ previamente definido.

No entanto, a convergência do método depende da garantia da existência e unicidade da raiz da função em um intervalo $[a, b]$, contendo a estimativa inicial x_0 . Ou seja, é necessário que $f(a) * f(b) < 0$ e $f''(x) \geq 0$, ou $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Observe que, no ensino do método de Newton-Raphson, o auxílio de uma ferramenta interativa que possibilite a visualização da função estudada e o comportamento do método quando adotados diferentes intervalos para a escolha da estimativa inicial, potencializará a percepção do aluno da aproximação linear feita em cada iteração do método, do significado das equações que descrevem os critérios de convergência e em como a não adoção de tais critérios se refletem no comportamento de sequência gerada pelo método.

3. Trabalhos Relacionados

Para o desenvolvimento CnVisual foi feito um estudo de ferramentas computacionais que tenham em seu escopo a solução de problemas numéricos e ensino utilizando meios tecnológicos. Na tabela a seguir, apresentamos uma breve descrição das ferramentas analisadas.

Trabalho	Descrição de ferramenta proposta
Uso de Software Escrito em Linguagem Java no Ensino do Cálculo Numérico [Losinskas et al. 2020].	A ferramenta desenvolvida possui uma interface simples e intuitiva. Assim como o CnVisual, a ferramenta possui uma área de visualização dos gráficos relacionados aos métodos.
<i>Visual Computational Numerical</i> ¹	A ferramenta possibilita o cálculo de diversos métodos, gera os valores obtidos em cada iteração e contém uma área gráfica simples, com foco principal na resolução dos problemas relacionados aos métodos implementados.

O CnVisual, comparado à ferramentas analisadas, se destaca pelas animações que ilustram as iterações dos métodos implementados. Em relação à facilidade de acesso e utilização da ferramenta, o CnVisual tem o diferencial de ser implementado no formato de um aplicativo web, acessível de qualquer computador com acesso à internet, sem a necessidade de instalação prévia.

4. O CN Visual

Esse trabalho tem como proposta o desenvolvimento de uma ferramenta computacional de interface simples e intuitiva, e de fácil acesso, para auxiliar no ensino e aprendizagem da disciplina Cálculo Numérico. Utilizamos a linguagem de programação R [R Core Team 2021] e, principalmente, a biblioteca *Shiny* [Chang et al. 2021], para implementar a ferramenta proposta neste trabalho na forma de um aplicativo web que pode ser acessado de qualquer dispositivo com acesso à *internet* através da página da ferramenta².

Nesta primeira versão da ferramenta, foram implementados os seguintes métodos:

- Raiz da Função: Bisseção, Falsa-posição, Newton-Raphson e Secante;
- Interpolação: Polinômios de Lagrange;
- Aproximação de Funções: Polinômios de Taylor;
- Integração: Método do Trapézios e Método de Simpson.

4.1. Interface

Ao abrir a ferramenta o usuário se depara com uma interface que pode ser dividida em 5 blocos, conforme destacado na Figura 1.

No Bloco 1, chamado “Opções”, o usuário seleciona o método que deseja utilizar. Uma vez escolhido o método, a configuração do Bloco 1 se altera, de acordo com os dados de entrada necessários para cada método selecionado.

No Bloco 2 estão os botões de controle da animação. No CN Visual, as iterações dos métodos implementados são exibidas em forma de animações, onde são apresentados os conceitos geométricos envolvidos. No Método dos Trapézios, por exemplo, utilizado

¹Página da ferramenta *Visual Computational Numerical*(acessada em 17/11/2024): <http://paginapessoal.utfpr.edu.br/tatianecazarin/calculo-numerico/softwares/VCN.exe/view>

²https://vvieira.shinyapps.io/cnvisual_shiny/

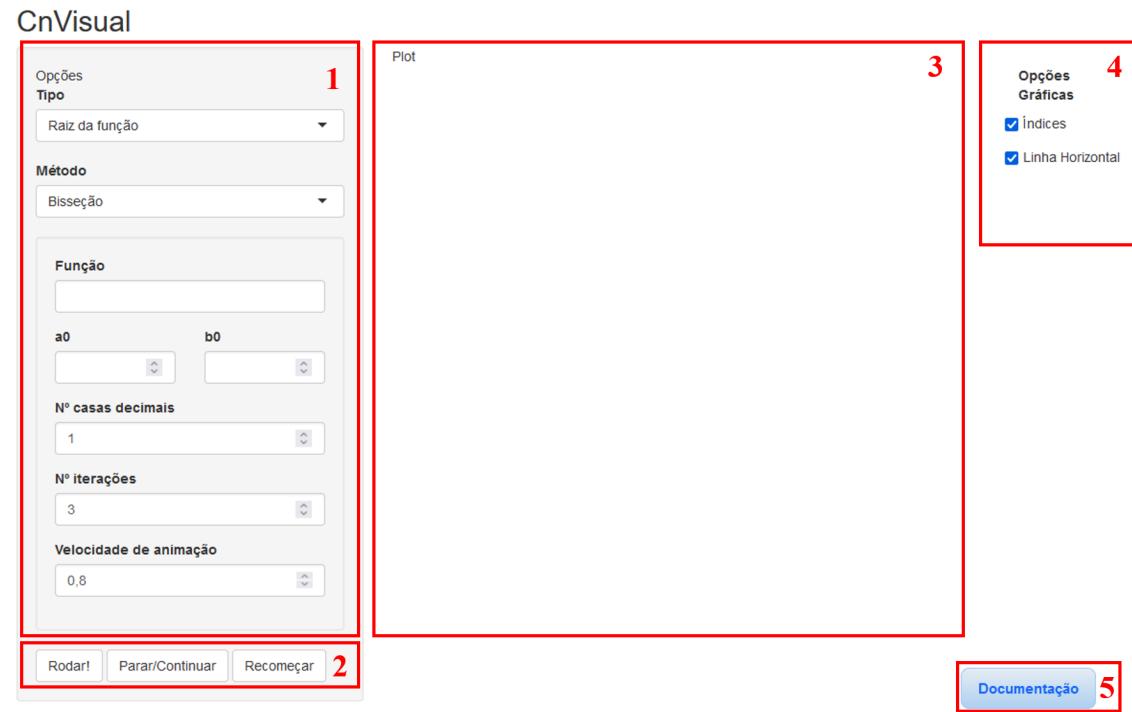


Figura 1. Interface Gráfica do CN Visual

para aproximar a integral de uma função através da aproximação linear da função em subintervalos do domínio, a animação exibe a função sendo desenhada no intervalo definido e, em seguida, os trapézios formados em cada subintervalo. Como ilustrado da Figura 2.

Ao acionar o botão “Rodar!”, os parâmetros preenchidos no Bloco 1 são utilizados para realizar o método e iniciar a animação exibida no Bloco 3. O botão “Parar/Continuar”, como o nome já diz, é usado para controlar a animação parando-a ou continuando. No botão “Recomeçar”, a animação é reiniciada.

O Bloco 3 é onde é apresentada a animação gerada. Além disso, é onde são exibidos os resultados encontrados pelos métodos e avisos ao usuário, conforme Figura 2. As opções gráficas, localizadas no Bloco 4, são formas de dar ao usuário maior liberdade para escolher as informações que serão exibidas durante a animação. No Bloco 5 temos o botão “Documentação”, que oferece um fácil acesso à documentação desenvolvida³.

4.2. Funcionalidades

As funcionalidades implementadas no CN Visual, seguem os requisitos apresentados na Seção 2. Algumas dessas funcionalidades já foram citadas na seção anterior, como o controle do que será exibido na área gráfica e controle sobre a animação. Apresentamos a seguir mais algumas funcionalidades que merecem destaque.

- **Mensagens de Erro:** Caso o usuário coloque uma entrada diferente do que esperado, ou, se durante alguma iteração do método ocorra algum erro, o usuário é avisado do erro ocorrido e encaminhado para a documentação para poder solucioná-lo.

³https://v-vieira.github.io/CnVisual_Shiny/

CnVisual

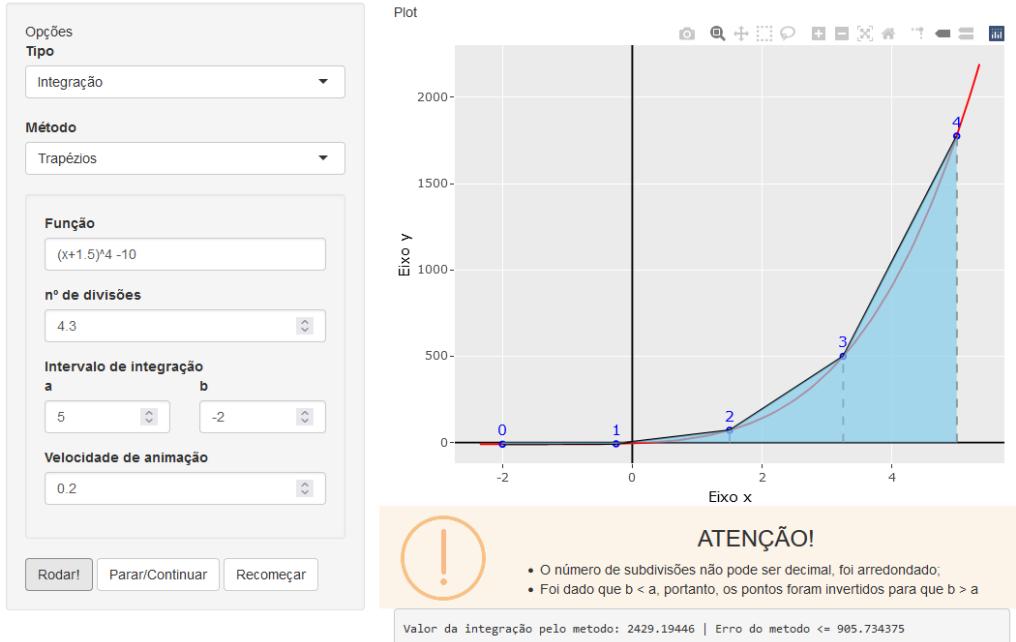


Figura 2. Mensagens claras e intuitivas orientam o usuário quanto a forma correta de inserção dos dados de entrada.

- **Avisos:** Além da mensagem de erro, também foi implementado um alerta que avisa ao usuário que foi tomada alguma ação quanto aos dados de entrada fornecidos. Na Figura 2 temos exemplo de alguns avisos ao usuário.
- **Interação com a área gráfica:** É possível interagir com a área gráfica da ferramenta através da movimentação dos eixos coordenados, do download dos gráficos gerados e *zoom* em regiões específicas do gráfico. Uma vez selecionada uma região do gráfico, ela passa a ser exibida inteiramente na área de visualização do resultado.

5. Avaliação da Ferramenta

Para avaliar a ferramenta desenvolvida foi realizado um estudo com um grupo de testes. Os participantes receberam instruções para acesso ao CnVisual e realização de tarefas.

O grupo de testes foi composto por 8 participantes com idades entre 20-27 anos (média de 24 anos), todos com conhecimento prévio dos conceitos do cálculo numérico. Dos quais, 62,5% estavam cursando a graduação, 25% concluíram a graduação e 12,5% são mestres, todos na área da engenharia.

Os participantes realizaram tarefas no aplicativo, que consistiam em aproximar a raiz, interpolar e integrar funções dadas, conforme orientado pelo guia disponibilizado para o estudo. Após a realização das tarefas, os participantes responderam à um questionário com o objetivo de avaliar a documentação, usabilidade, facilidade de aprendizado e satisfação dos usuários.

No questionário proposto, foram apresentadas aos usuários afirmações para as quais eles deveriam informar o quanto concordava, ou não, de acordo com uma pontuação que ia de 0 a 5. Nesta pontuação, 0 significava discordo totalmente da

afirmação feita e 5, concordo totalmente. Apresentamos a seguir os resultados da avaliação da ferramenta proposta.

Afirmação	Grau de concordância					
	0	1	2	3	4	5
A documentação abrangeu tudo que eu esperava.			○		○○	○○○○○
A documentação está apresentada de forma clara e objetiva.					○○○	○○○○○
A interface está estruturada de forma clara e intuitiva.				○	○○○	○○○○
Os campos de preenchimento dos métodos estão descritos de forma clara.	○○	○○	○○	○○	○○	
As opções gráficas são suficientes.					○○	○○○○○○○
Os controles sobre a animação são suficientes.				○	○○○	○○○○
As animações auxiliam no entendimento do método.					○○	○○○○○○○
A forma como as animações estão estruturadas são suficientes.					○○	○○○○○○○
Poder replicar exemplos e manipular os parâmetros de entrada auxiliam no entendimento dos métodos.				○	○	○○○○○○○
Eu indicaria o CnVisual para um conhecido.					○○○	○○○○○
De forma geral, como você classifica sua experiência com o CnVisual?					○○	○○○○○○○

Figura 3. Resultados da avaliação do CN Visual.

6. Conclusão

O objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento de uma ferramenta que auxiliasse alunos e professores no ensino e aprendizagem do cálculo numérico. Um aplicativo de fácil acesso e com funcionalidades que possibilitasse uma maior compreensão dos métodos.

Utilizando a linguagem de programação R e seus pacotes foi implementado o software CN Visual, que está hospedado em um servidor *web* e disponível em qualquer dispositivo com acesso à *internet* (embora tenha sido pensado para uso em computador). Como parte da ferramenta implementada, foi desenvolvida uma documentação para auxiliar os usuários.

Com base nos resultados apresentados, podemos dizer que o CN Visual atendeu aos objetivos propostos. Porém, ainda há o que possa ser melhorado, como a implementação de novos métodos e uma descrição mais clara dos campos de preenchimento da ferramenta.

Referências

- Brezinski, C. and Wuytack, L. (2001). *Numerical Analysis: Historical Developments in the 20th Century*. Elsevier, Amsterdam.
- Chang, W., Cheng, J., Allaire, J. J., Sievert, C., Schloerke, B., Xie, Y., Allen, J., McPher- son, J., Dipert, A., and Borges, B. (2021). *shiny: Web Application Framework for R*.
- Das, K., Singh, R., and Mishra, S. C. (2013). Numerical analysis for determination of the presence of a tumor and estimation of its size and location in a tissue. *Journal of Thermal Biology*, 38(1):32–40.
- Gantes, C., Connor, J., and Logcher, R. (1991). Combining numerical analysis and engineering judgment to design deployable structures. *Computers & Structures*, 40(2):431–440.
- Judd, K. L. (1998). *Numerical methods in economics*. MIT Press, Cambridge, Mass.
- Laudares, J. B. and Lachini, J. (2000). O uso do computador no ensino de matemática na graduação. *Reunião da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*, 23.
- Losinskas, L., Silva, E. J. G. D., Blass, L., and Bihain, A. L. J. (2020). USO DE SOFTWARE ESCRITO EM LINGUAGEM JAVA NO ENSINO DE CÁLCULO NUMÉRICO. *Anais do Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão*, 10(1). Section: Artigos.
- Neto, J. C. and Imamura, M. M. (2005). Uma Abordagem dos Tipos de Ferramentas Computacionais Utilizados para Auxiliar o Processo Ensino e Aprendizagem da Matemática. *CEFET-PR (Monografia)*.
- Nielsen, J. and Mack, R. L., editors (1994). *Usability inspection methods*. Wiley, New York.
- Potts, D. (2002). *Guidelines for the use of advanced numerical analysis*. Thomas Telford ; ASCE Press, London : Distributed by Reston, VA.
- R Core Team (2021). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Ruggiero, M. and da Rocha Lopes, V. (1996). *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Pearson Makron Books.