Estratégias vencedoras para jogos de convexidade em grafos

João Marcos Brito[1], **Rudini Sampaio**[1]

[1]Departamento de Computação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brazil.

jmbmaluno@alu.ufc.br, rudini@ufc.br

Abstract. *In 1981, the first paper on graph convexity was published. Three years later, in 1984, one of its authors, Frank Harary, introduced the first convexity games. Despite having been created a long time ago, the last research on convexity games dated back to 2003, with few significant results due to their difficulty. In this work, we use the Sprague-Grundy Theory to solve these games in special graphs, such as trees. Furthermore, we proved that one of these games is PSPACE-hard, which puts it one level of computational complexity above NP-hard problems.*

Resumo. *Em 1981, foi publicado o primeiro artigo em inglês de convexidade em grafos. Três anos depois, em 1984, um de seus autores, Frank Harary, introduziu os primeiros jogos de convexidade. Apesar de definidos há muito tempo, as últimas pesquisas sobre jogos de convexidade datavam de 2003, com poucos resultados significativos devido a sua dificuldade. Neste trabalho, conseguimos usar a Teoria de Sprague-Grundy para resolver jogos de convexidade em grafos especiais, como árvores. Além disso, provamos que um desses jogos é PSPACE-difícil, o que o coloca um nível de complexidade acima dos problemas NP-difíceis.*

1. Introdução

Esse trabalho se enquadra na Teoria dos Jogos Combinatórios, um ramo da Teoria dos Jogos que estuda jogos sequenciais de dois jogadores com informação perfeita e sem aleatoriedade. Um jogo é *sequencial* se os jogadores jogam alternadamente, e é de *informação perfeita* se todo jogador tem conhecimento total da posição do jogo em cada instante, onde uma *posição* é uma configuração dos elementos do jogo em um dado momento.

[Harary and Nieminem 1981] introduziram o conceito de Convexidade para grafos. Três anos depois, [Harary 1984], reconhecido como um dos pais da teoria de grafos, introduziu os primeiros jogos de convexidade em grafos. De 1984 a 2003, vários autores obtiveram resultados sobre jogos de convexidade, principalmente para classes de grafos simples, como caminhos e ciclos [Harary 1984, Buckley and Harary 1985a, Buckley and Harary 1985b, Nečásková 1988, Haynes et al. 2003]. No entanto, a complexidade para árvores e mesmo a complexidade para grafos gerais permaneciam em aberto.

Em 2022, quase vinte anos após o último artigo nessa tema, iniciamos o estudo de jogos de convexidade. Após poucos meses, o aluno de iniciação científica, João Marcos, descobriu sozinho que uma certa teoria de jogos desenvolvida nos anos 1930, a Teoria de Sprague-Grundy, é capaz de modelar tais problemas de jogos imparciais de convexidade e, com isso, provou que tais jogos podem ser resolvidos em tempo linear em grafos caminho. Esse resultado chamou a atenção de seu orientador, Rudini Sampaio, que desconhecia essa teoria. Aplicando-a às árvores, foram capazes de obter um algoritmo polinomial para decidir o vencedor de jogos de convexidade nesta classes de grafos, com o auxílio de um aluno de doutorado. Nesses dois resultados (algoritmo linear em grafos caminho e algoritmo polinomial em árvores), a contribuição do aluno de iniciação científica foi total. Vale ressaltar a dificuldade desses resultados, considerando que tais jogos foram introduzidos há 40 anos, que nenhum pesquisador anteriormente havia relacionado com a Teoria de Sprague-Grundy e muito menos obtido um algoritmo para árvores.

Posteriormente, seu orientador agregou outros membros à pesquisa, conseguindo obter as primeiras provas de que alguns desses jogos de convexidade são PSPACE-difíceis para grafos gerais. Nesse ponto, o aluno de iniciação científica teve uma contribuição técnica menor, dada a especificidade e a falta de experiência em reduções de PSPACE-completude, mas certamente contribuiu com o resultado, participando das discussões e dando sugestões com o conhecimento adquirido na pesquisa dos resultados anteriores.

2. Jogos de convexidade em grafos

Primeiro fornecemos as principais definições de jogos de convexidade em grafos. O *intervalo geodésico* $I_{\mathrm{g}}(S)$ de um conjunto S de vértices de um grafo G consiste de S e todo vértice em um caminho mínimo entre vértices de S. Dizemos que S é *convexo* se $I_{\mathrm{g}}(S) = S$. A *convexidade geodésica* em G consiste da família de conjuntos convexos. A *envoltória convexa* de S é o menor conjunto convexo $\mathrm{hull}_{\mathrm{g}}(S)$ que contém S. Sabe-se que $\mathrm{hull}_{\mathrm{g}}(S)$ pode ser obtido aplicando sucessivamente o intervalo $I_{\mathrm{g}}(\cdot)$ sobre S até obter um conjunto convexo. [Harary 1984] definiu o *jogo do intervalo* e o *jogo da envoltória*.

Definição 2.1. *Seja G um grafo. Nos jogos definidos abaixo, seja L o conjunto dos vértices rotulados inicialmente vazio e a definição do conjunto $f(L)$ depende do jogo. Dois jogadores (Alice e Bob, começando por Alice) rotulam alternadamente um vértice não rotulado que não está em $f(L)$. O jogo acaba quando $f(L) = V(G)$.*

- *No jogo do intervalo fechado JIF$_{\mathrm{g}}$: $f(L) = I_{\mathrm{g}}(L)$.*
- *No jogo da envoltória fechada JEF$_{\mathrm{g}}$: $f(L) = \mathrm{hull}_{\mathrm{g}}(L)$.*

Na variante *normal*, o último a jogar vence. Na variante *misère*, o último a jogar perde. Esses jogos combinatórios e suas variantes são classificados como *imparciais*, pois a única diferença entre os jogadores é que Alice começa o jogo. O problema de decisão é determinar se Alice possui uma estratégia vencedora. A Figura 1(a) é um exemplo do jogo JIF$_{\mathrm{g}}$ sobre um grafo G supondo que Alice comece rotulando o vértice 1. Note que o conjunto L dos vértice já rotulados é $\{1\}$ e que $f(L) = I_{\mathrm{g}}(L) = \{1\}$ na Figura 1(a).

Em sua jogada, Bob poderá rotular o vértice 2, fazendo que $f(L) = I_{\mathrm{g}}(L) = L = \{1, 2\}$, ilustrado na Figura 1(b). Alternativamente, Bob poderia rotular o vértice 5, fazendo que $L = \{1, 5\}$ e $f(L) = I_{\mathrm{g}}(L) = \{1, 2, 5, 6\}$, ilustrado na Figura 1(c). Desta forma, o jogo continua até que $f(L) = V(G)$.

3. Jogos combinatórios imparciais e a Teoria de Sprague-Grundy

[Zermelo 1913] provou que, em jogos finitos de informação perfeita e sem empates, um dos jogadores sempre possui uma estratégia vencedora. Com isso, o problema de decisão é saber se o primeiro jogador possui uma estratégia vencedora. A Teoria de Sprague-Grundy é uma teoria muito bonita desenvolvida nos anos 1930 e se aplica apenas a *jogos*

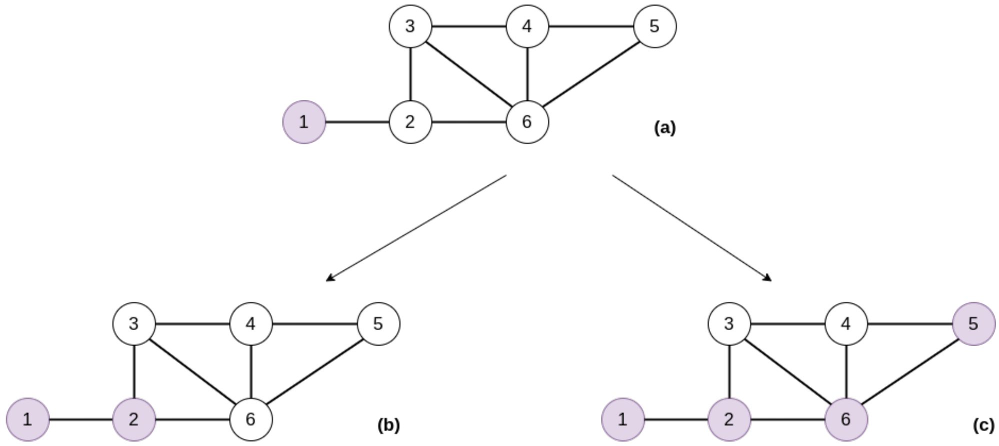


Figura 1. Representação gráfica do jogo de convexidade geodésica de intervalo fechado em um grafo

imparciais. Dizemos que um jogo combinatório é *imparcial* se a única diferença entre o primeiro jogador e o segundo jogador é que o primeiro começa o jogo. Em outras palavras, todos os movimentos possíveis dependem apenas da posição do jogo e não de qual jogador irá fazer o movimento. Por exemplo, xadrez não é imparcial, pois faz muita diferença para uma posição se o próximo a jogar será o jogador de brancas ou de pretas. Costuma-se chamar os jogadores de Alice e Bob, sendo Alice a primeira a jogar.

O jogo Nim é a base fundamental da Teoria de Sprague-Grundy. O jogo consiste de pilhas de objetos e, em cada turno, um jogador escolhe uma pilha não vazia e remove qualquer quantidade de objetos da pilha, até não haver mais objetos. Uma instância de Nim é dada por uma sequência $\Phi = (h_1, h_2, \ldots, h_k)$, onde k é o número de montes e $h_i \geq 1$ é o tamanho do i-ésimo monte. Nim foi matematicamente resolvido por Bouton em 1901 para qualquer instância Φ [Bouton 1901]. Em outras palavras, o problema para decidir qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora é resolvido em tempo linear em ambas variantes (normal e misère) do Nim. A estratégia vencedora para o Nim está relacionada com a função **nim-sum**. Dada uma sequência Φ com k pilhas de uma instância no Nim, seja **nim-sum** : $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ a função tal que **nim-sum**$(\Phi) = h_1 \oplus h_2 \oplus \cdots \oplus h_k$, onde $\oplus$ é a operação bitwise xor. Com isso, associa-se qualquer instância do jogo de Nim a um valor inteiro positivo. Na variante normal de Nim, Alice tem uma estratégia vencedora se e somente se **nim-sum**$(\Phi) > 0$. Na variante misère de Nim, Alice tem uma estratégia vencedora se e somente se **nim-sum**$(\Phi) > 0$ e há pelo menos uma pilha com mais de um objeto, ou **nim-sum**$(\Phi) = 0$ e todas as pilhas possuem exatamente um objeto.

A Figura 2 é um exemplo de representação do jogo Nim que inicia com instância representada por (a) e apresenta uma estratégia vencedora para Alice. Na Figura 2(a), o **nim-sum**$(2, 3, 2) = 2 \oplus 3 \oplus 2 = 3$. Logo, em ambas as variantes Alice possui uma estratégia vencedora. Ela pode retirar todos os objetos da segunda pilha e isso resultará na Figura 2(b) com **nim-sum**$(2, 0, 2) = 0$. Após isso, Bob ou removeria um objeto de uma das pilhas e isso resultaria na Figura 2(c) com **nim-sum**$(2, 0, 1) = 3$, ou removeria todos os objetos de uma das pilhas e isso resultaria na Figura 2(d) com **nim-sum**$(2, 0, 0) = 2$. No caso da Figura 2(c), Alice ainda teria estratégia vencedora para ambas as variantes. Na variante normal, Alice retiraria um objeto do primeiro monte e isso resultaria na Figura

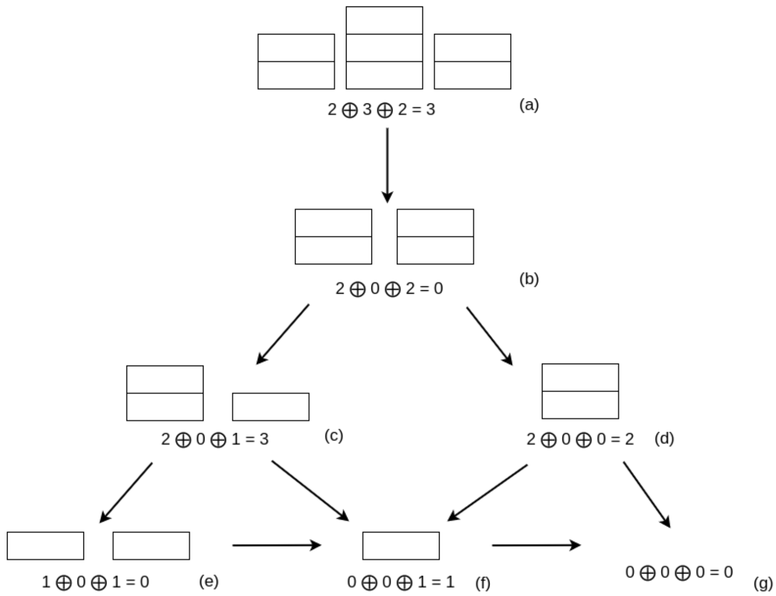


Figura 2. Desenho de uma representação de um jogo de Nim

2(e) com **nim-sum**$(1, 0, 1) = 0$ e Bob retiraria o ultimo objeto de um dos dois montes levando a Figura 2(f) e Alice, por fim, retiraria o último objeto do último monte resultando na Figura 2(g) e venceria. Na variante misère, Alice retiraria todos os objetos do primeiro monte e isso resultaria na Figura 2(f), Bob teria que retirar o ultimo objeto do último monte e perderia. No caso da Figura 2(d), Alice na variante normal retiraria todos os objetos do monte resultando na Figura 2(g) e venceria o jogo. Na variante misère, Alice removeria apenas um objeto do monte resultando na Figura 2(f) e Bob perderia.

A Teoria de Sprague-Grundy, desenvolvida independentemente por R. P. Sprague [Sprague 1936] e P. M. Grundy [Grundy 1939] nos anos 1930, diz que é possível associar um número (chamado de *nimber*) a toda posição da variante normal de um jogo imparcial, associando a um jogo de Nim com apenas uma pilha. A conclusão com essa associação é que, após um movimento em uma posição com nimber $h > 0$ de um jogo imparcial na variante normal, é possível obter uma posição com qualquer nimber em $\{0, 1, \ldots, h-1\}$. Dada uma posição H em um jogo imparcial e o conjunto $\{h_1, \ldots, h_k\}$ dos nimbers de todas as posições que podem ser obtidas após uma jogada em H, o nimber de H pode ser calculado pelo valor mex$\{h_1, \ldots, h_k\}$, onde mex é o mínimo inteiro não negativo que não pertence ao conjunto. Além disso, uma posição obtida por uma união de k posições disjuntas com nimbers $h_1, \ldots, h_k$ tem nimber $h_1 \oplus \cdots \oplus h_k$. Por fim, fazendo uma associação direta ao jogo Nim, para qualquer jogo imparcial de uma instância com nimber h temos que Alice possui uma estratégia vencedora na variante normal se e só se $h > 0$.

4. Resultados algorítmicos

Uma das contribuições desse trabalho é a obtenção de algoritmos polinomiais para decidir o vencedor de jogos imparciais de convexidade em certas classes de grafos, como as árvores, aplicando a Teoria de Sprague-Grundy. Foram investigados o jogo do intervalo fechado JIF$_g$ e o jogo da envoltória fechada JEF$_g$. Inicialmente, é importante notar que esses dois jogos, quando jogados em árvores, são equivalentes, já que dado um conjunto

S de vértices de uma árvore T, $I_g(S)$ é convexo e é o menor conjunto convexo que contém S. Portanto, os resultados apresentados do JIF$_g$ são equivalentes aos resultados do JEF$_g$.

Outra observação necessária é que JIF$_g$ é um jogo combinatório imparcial, pois é sequencial (Alice e Bob se alternam), de informação perfeita (ambos jogadores tem total conhecimento dos elementos do jogo e de todas as jogadas possíveis em qualquer instância) e ambos os jogadores possuem as mesmas possibilidades de jogada em qualquer momento do jogo. Portanto, é possível aplicarmos a teoria de Sprague-Grundy nas instâncias desses jogos e calcularmos um *nimber* para cada posição, relacionando o JIF$_g$ com o Nim, para determinarmos se Alice possui uma estratégia vencedora. Primeiramente, apliquemos a Teoria de Sprague-Grundy no JIF$_g$ em caminhos e depois em árvores.

4.1. Jogos de convexidade de intervalo fechado em caminhos

Seja P um grafo que é um caminho e $V(P) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Em um jogo de convexidade fechada em P, considere que apenas v_1 foi rotulado. Todo os movimentos possíveis a partir desta instância podem rotular $1, \ldots, n-1$ vértices. Perceba que essa instância se assemelha a um jogo de Nim com apenas um monte de tamanho $n-1$, já que os únicos movimentos possíveis seriam retirar $1, \ldots, n-1$ objetos do monte. Portanto, um caminho P de n vértices em um jogo de convexidade fechada, cujo primeiro vértice do caminho já está rotulado terá $nimber$ igual a $n-1$ visto que os movimentos possíveis a partir dessas instância terão valor $\{0, ..., n-2\}$ e o mínimo valor excludente desse conjunto é $mex\{0, ..., n-2\} = n-1$. Na Figura 3, a floresta T terá $nimber = 3 \oplus 1 \oplus 2 = 0$, considerando que os vértices escuros já estão rotulados. Isso significa, segundo a Teoria de Sprague-Grundy, que o próximo jogador perderá nas variantes normal e misère.

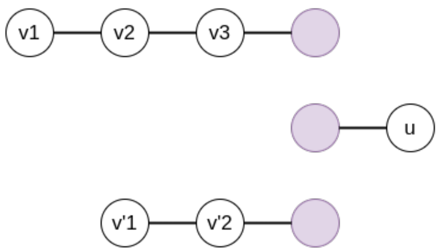


Figura 3. Representação gráfica do jogo do intervalo fechado

4.2. Jogos de convexidade de intervalo fechado em árvores

Seja G uma árvore. Em um jogo de convexidade de intervalo fechado em G todas as jogadas possíveis rotularão um conjunto de vértices, exceto a primeira jogada, e produzirão conjuntos de vértices não rotulados disjuntos que ou serão caminhos ou serão árvores. Perceba também que em cada conjunto de vértices não rotulados apenas um vértice do conjunto é vizinho de um vértice já rotulado. Considere que em G foi feito um movimento que rotulou um conjunto C de vértices. Para calcular o $nimber$ da instância resultante é necessário, segundo a teoria de Sprague-Grundy, fazer a operação bitwise xor entre todos os $nimber's$ dos jogos independentes entre si que foram gerados após o conjunto C ser rotulado. Nos jogos de convexidade em árvores, esses jogos independentes entre si são os conjuntos de vértices não rotulados. Caso o conjunto de vértices não rotulado seja um caminho é possível calcular seu $nimber$ pelo método descrito na subseção 4.1 já que exatamente um vértice desse caminho é vizinho de um vértice já rotulado. Contudo, se o conjunto de vértices não rotulados for uma árvore, segundo a teoria de Sprague-Grundy, é possível calcular seu $nimber$ através do mínimo valor excludente (mex) do conjunto dos valores obtidos após um movimento nessa árvore. Logo, é possível de maneira recursiva calcular o nimber de um JIF$_g$ em uma árvore. Para demonstrar isso, é necessário primeiro definirmos e solucionarmos o jogo em uma versão simplificada.

Definição 4.1. *Dado um grafo G e um vértice $v \in V(G)$, seja o jogo do intervalo fechado simplificado $JIFS_C$ de uma instância (G, v) um JIF$_g$ no grafo G com exceção de que v já está rotulado no início do jogo. Isso significa que ao invés de estar vazio no começo do jogo, o conjunto L de vértices rotulados é tal que $L = \{v\}$. Analogamente, definimos as versões simplificadas para os outros jogos definidos anteriormente, como o JEFS$_g$.*

Teorema 4.1. *O problema de decisão para as variantes normal e misère para o jogo do intervalo fechado simplificado $JIFS_g$ e para o jogo da envoltória fechada simplificada $JEFS_g$ é resolvido em tempo polinomial em árvores.*

Demonstração. Seja T uma árvore e o vértice $v \in V(T)$. Em um JIFS$_g$ na instância (T, v), um novo vértice w é rotulado, então os vértice no caminho entre v e w também serão rotulados no jogo. Se v não tem vizinhos, então (T, v) tem $nimber = 0$ e Alice perde na variante normal e ganha na variante misère. Mas se v tiver vizinhos, seja u um vizinho de v. Dizemos que (T, v, u) é um jogo simplificado da instância $(T_{v,u}, v)$ onde $T_{v,u}$ é uma subárvore de T contendo v obtida através da remoção de todas as arestas que incidem em v exceto vu. Note que v é uma folha de $T_{v,u}$. Vejamos o cálculo do nimber de (T, v, u). Seja $u_1, ..., u_k$ os vizinhos de u distintos de v. Assuma que o $nimber$ de (T, u, u_i), denotado por h_i, em $JIFs_{\mathrm{g}}$ é conhecido. Se Alice rotular u, então os jogos de $(T, u, u_1), ..., (T, u, u_k)$ são independentes entre si, isto é, um movimento em uma instância não afeta outra. Pela teoria de Sprague-Grundy, a posição resultante tem nimber $h_1 \oplus \cdots \oplus h_k$, onde h_i é o nimber da posição resultante de (T, u, u_i). Se Alice rotular um vértice w_i em (T, u, u_i), que é distinto de u, então u também será rotulado e novamente o jogo nas subárvores serão independetes entre si. Seja h'_i o nimber da posição resultante de (T, u, u_i). Então, pela teoria de Sprague-Grundy, a posição resultante de (T, v, u) após o movimento em w_1 tem nimber $h_1 \oplus ... \oplus h'_i \oplus ... \oplus h_k$. Além disso, h'_i pode ter qualquer valor em $\{0, 1, ..., h_i - 1\}$. Seja N o conjunto de todos os nimbers de $h'_1 \oplus ... \oplus h'_k$ onde $h'_i = h_i$ para todo $i = 1, ..., k$ exceto que $h'_i \in \{0, ..., h_i - 1\}$. Portanto, o nimber de (T, v, u) é exatamente mex(N), desde que N contenha todas as nimbers possíveis após um movimento em (T, v, u). Esses argumentos conduzem ao Algoritmo 1 JIFS$_g$-folha (T, v, u) que é recursivo, de tempo polinomial e calcula o $nimber$ de (T, v, u) de uma árvore T enraizada em uma folha v com um vizinho u. Agora, considere o jogo em toda árvore T e seja $v_1, ..., v_k$ os vizinhos de v com $k \geq 2$. Pelos argumentos supracitados, é possível determinar o $nimber$ l_i de (T, v, v_i) em JIFS$_g$. Então, como antes, temos que os jogos nas subárvores são independentes e o nimber de (T, v) é exatamente $h = l_1 \oplus \cdots \oplus l_k$. Logo, é possível calcular o nimber de (T, v) de uma árvore T enraizada em v. Isso leva ao Algoritmo 2 JIFS$_g$-tree (T, v) que recebe como entrada uma árvore T enraizada em v e calcula o $nimber$ h da instância (T, v). Por fim, fazendo uma associação direta ao jogo Nim, temos que Alice possui uma estratégia vencedora na variante normal se e somente se $h > 0$. Além disso, Alice possui uma estratégia vencedora na variante misère se e somente se $h > 0$ e há pelo menos uma subárvore com mais do que um vértice não rotulado, ou $h = 0$ e todas as subárvores possuem exatamente um vértice não rotulado. □

Algoritmo 1 JIFS$_g$-folha(T, v, u)

if *nimber[u]* já foi calculado **then**
    return *nimber[u]*;
if u tem grau 1 em T **then**
    $nimber[u] \leftarrow 1$;
    return 1;
let $u_1, \dots, u_k$ os vizinhos de u distintos de v em T;
for $i = 1, \dots, k$ **do**
    JIFS$_g$-folha(T, u, u_i)
    let $h_i \leftarrow nimber[u_i]$
if $k > 1$ **then**
    $N \leftarrow \{h_1 \oplus \dots \oplus h_k\}$
    for $i = 1, \dots, k$ **do**
        for $h'_i = 0, \dots, h_i - 1$ **do**
            $N \leftarrow N \cup \{h_1 \oplus \ \cdots \oplus h'_i \oplus \cdots \oplus h_k\}$;
    $nimber[u] \leftarrow mex(N)$
    return $nimber[u]$;
else
    $nimber[u] \leftarrow h_1 + 1$
    return $nimber[u]$;

Na árvore T da Figura 4, se Alice rotulou c na primeira jogada do JIF$_g$ em T, temos a posição (T, c) de um JIFS$_g$ onde Bob é o primeiro a jogar. Seja T' obtido quando x é rotulado. Inicialmente vamos calcular o *nimber* da instância (T', v). Se Bob rotular v, então o conjunto de vértices não rotulados disjuntos serão dois caminhos com quatro vértices não rotulados, logo o *nimber* dessa instância é $4 \oplus 4 = 0$. Se Bob rotular outro vértice de T', então ainda haverá dois caminhos de vértices não rotulados disjuntos. Um deles terá $k \leq 3$ vértices não rotulados e o outro terá exatamente 4 vértices não rotulados. Associando a um jogo de Nim, haverá um monte de tamanho $k \leq 3$ e outro monte de tamanho 4. Então o *nimber* de (T', c) é $mex\{4 \oplus 4, 4 \oplus 3, 4 \oplus 2, 4 \oplus 1, 4 \oplus 0\} = 1$.

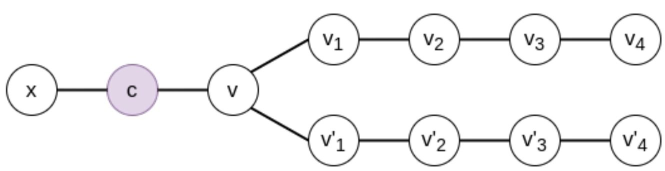


Figura 4. Representação gráfica do jogo simplificado JIFS$_g$ na árvore T

Por fim, considerando novamente o vértice x, o *nimber* de (T', c) é $1 \oplus 1 = 0$. Portanto, o segundo jogador (que é Alice nesse caso) terá uma estratégia vencedora para as variantes normal e misère.

Algoritmo 2 JIFS$_g$-tree(T, v)

let $h \leftarrow 0$; **let** $v_1, \ldots, v_k$ os vizinhos de v em T;
for $i = 1, \ldots, k$ **do**
    $h \leftarrow h \oplus SCIG_C$-folha$(T, v, v_i)$
if normal-play **then**
    if $h > 0$ **then** Alice wins;
    else Bob wins;
if misère-play **then**
    if todas as subárvores de v possuem exatamente um vértice não rotulado **then**
        if $h = 0$ **then** Alice wins;
        else Bob wins;
    else
        if $h > 0$ **then** Alice wins;
        else Bob wins;

Corolário 4.1. *O problema de decisão das variante normal e misère para o jogo de convexidade de intervalo fechado JIF$_g$ e para o jogo de convexidade de envoltória fechado JEFS$_g$ é resolvido em tempo polinomial em árvores.*

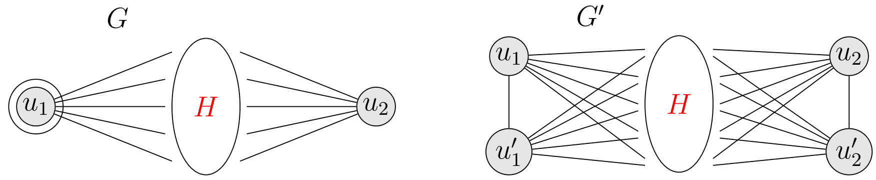
Demonstração. Seja T uma árvore. Alice possui uma estratégia vencedora no JIF$_g$ em T se e somente se existe um vértice $v \in V(T)$ cujo o segundo jogador do JIFS$_g$ na instância (T, v) possui uma estratégia vencedora e isto foi demonstrado no Teorema 4.1. □

5. PSPACE-completude de jogos de convexidade

Nessa seção, provamos que as variantes normal e misère de JEF$_g$ e JEF$_g$ e suas versões simplificadas são PSPACE-completas. Como o número de turnos é no máximo n e, em cada turno, o número de vértices possíveis a rotular é no máximo n, todos os jogos são limitados polinomialmente, e estão em PSPACE [Hearn and Demaine 2009]. Uma das maiores dificuldades em se obter provas de PSPACE-completude é encontrar o jogo PSPACE-completo mais adequado para redução, já que se conhecem mais problemas NP-completos do que PSPACE-completos. Felizmente, o jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUES, que é PSPACE-completo [Schaefer 1978], mostrou-se útil para todas as reduções. Nesse jogo, dado um grafo G, dois jogadores, Alice e Bob, começando com Alice, alternam-se escolhendo vértices de modo que o conjunto de vértices escolhidos deve sempre ser um clique. O último a jogar vence. Esse jogo está relacionado ao famoso jogo NODE KAYLES, que também é PSPACE-completo [Schaefer 1978], no qual o objetivo é obter um conjunto independente ao invés de um clique. O jogo de FORMAÇÃO DE CLIQUES é o jogo NODE KAYLES jogado no complemento do grafo, e vice-versa.

Teorema 5.1. *A variante misère de JEF$_g$ e sua versão* SIMPLIFICADA *são PSPACE-completos mesmo em grafos com diâmetro 2.*

Demonstração. Seja H uma instância do jogo FORMAÇÃO DE CLIQUES, que não é um grafo completo. Primeiro obtemos uma redução para JEFS$_g$ (simplificado). Seja G obtido de H adicionando dois vértices não adjacentes u_1 e u_2 adjacentes a todos os vértices de H. Veja a Figura 5(a). Observe que G tem diâmetro 2. Seja também u_1 o vértice que



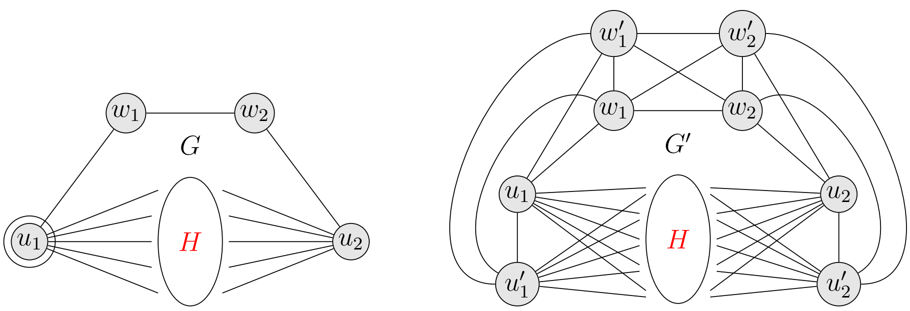
(a) Grafo G da redução p/ JEFS$_g$ (b) Grafo G' da redução p/ JEF$_g$

Figura 5. Grafos das reduções do Teorema 5.1 nas variantes misère.

já está rotulado em JEFS$_g$. Provamos que Alice tem uma estratégia vencedora no jogo FORMAÇÃO DE CLIQUES em H se e somente se ela tem uma estratégia vencedora na variante misère de JEFS$_g$ em (G, u_1). Se um jogador rotular u_2, ele perde imediatamente. Se um jogador rotular v_j em H e houver um vértice não-adjacente rotulado v_i em H, então o jogador perde imediatamente. Assim, podemos assumir que o conjunto L de vértices rotulados forma uma clique em todos os turnos, exceto no último. Isso está diretamente relacionado ao jogo FORMAÇÃO DE CLIQUES em H. Se Alice tiver uma estratégia vencedora no jogo FORMAÇÃO DE CLIQUES em H, então Bob é o primeiro a rotular um vértice de G com um não-vizinho rotulado, implicando que ele perde o jogo misère. Analogamente para Bob. Agora obtemos uma redução para JEF$_g$. Seja G' obtido de G adicionando dois vértices u_1' e u_2', adjacentes a todos os vértices de H, e as arestas $u_1'u_1$ e $u_2'u_2$. Veja a Figura 5(b). Observe que G' tem diâmetro 2. Se Alice tem uma estratégia vencedora no jogo FORMAÇÃO DE CLIQUES em H, então ela joga JEF$_g$ em G' de acordo com sua estratégia nos vértices de H, a menos que Bob selecione um dos vértices u_1 ou u_1' (resp. u_2 e u_2') fazendo com que Alice selecione o outro. O mesmo se Bob tiver uma estratégia vencedora no jogo FORMAÇÃO DE CLIQUES em H. Se houver dois vértices selecionados não adjacentes durante o jogo, então JEF$_g$ termina e o último a jogar perde. Então, como antes, o conjunto L de vértices rotulados forma uma clique em todos os turnos, exceto no último, e pronto. □

Teorema 5.2. *A variante normal de JEF$_g$ e sua versão* SIMPLIFICADA *são PSPACE-completos mesmo em grafos com diâmetro 2.*

Demonstração. Seguem ideias similares às da prova do Teorema 5.1, mas um pouco mais elaboradas. Veja a Figura 6. □



(a) Grafo G da redução p/ JEFS$_g$ (b) Grafo G' da redução p/ JEF$_g$

Figura 6. Grafos das reduções do Teorema 5.2 nas variantes normais.

6. Conclusão

Este trabalho investigou jogos de convexidade aplicados à algumas classes de grafos, utilizando a Teoria de Sprague-Grundy e resultados de PSPACE-completude de outros jogos clássicos. Diante disso, é possível concluir que o principal objetivo deste trabalho foi alcançado, tendo em vista os resultados listados abaixo, os quais tiveram forte contribuição do aluno de iniciação científica, principalmente o primeiro.

- Obtenção de algoritmo polinomial para decidir o vencedor de jogos de convexidade em caminhos e árvores;
- Primeiras provas de PSPACE-completude para jogos de convexidade em grafos;

Como trabalhos futuros, indica-se a pesquisa de jogos de convexidade em classes de grafos que contenham as árvores, como os grafos de largura em árvore limitada.

Referências

Bouton, C. L. (1901). Nim, a game with a complete mathematical theory. *Annals of Mathematics*, 3(1/4):35–39.

Buckley, F. and Harary, F. (1985a). Closed geodetic games for graphs. *Congr Numerantium*, 47:131–138. Proc 16th Southeastern Combinatorics, Graph Th and Comput.

Buckley, F. and Harary, F. (1985b). Geodetic games for graphs. *Quaest Math*, 8:321–334.

Grundy, P. M. (1939). Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–8.

Harary, F. (1984). Convexity in graphs: Achievement and avoidance games. In *Annals of Discrete Mathematics (20)*, volume 87, page 323. North-Holland.

Harary, F. and Nieminem, J. (1981). Convexity in graphs. *J Differ Geom*, 16(1):185–190.

Haynes, T., Henning, M., and Tiller, C. (2003). Geodetic achievement and avoidance games for graphs. *Quaestiones Mathematicae*, 26:389–397.

Hearn, R. and Demaine, E. (2009). *Games, Puzzles and Computation*. A. K. Peters Ltd.

Nečásková, M. (1988). A note on achievement geodetic game. *Quaest Math*, 12:115–119.

Schaefer, T. (1978). On the complexity of some two-person perfect-information games. *Journal of Computer and System Sciences*, 16(2):185–225.

Sprague, R. (1936). Über mathematische Kampfspiele. *Tôhoku Math J*, 41:438–444.

Zermelo, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In *Proc. 5th Int. Congress of Mathematicians*, pages 501–504.